O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

MEXANIKA MUAMMOLARI

O‘ZBEKISTON
JURNALI

1

2026

УЗБЕКСКИЙ
ЖУРНАЛ

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ

Журнал под таким названием издается с января 1992 г.

Ташкент – 2026

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор – докт. физ.-мат. наук, проф. К.С. СУЛТАНОВ
Первый заместитель главного редактора – д.ф.-м.н., проф. Б.М. МАРДОНОВ
Заместитель главного редактора – докт. физ.-мат. наук, с.н.с. Р.А. АБИРОВ
Заместитель главного редактора – PhD, с.н.с. Н.А. НИШОНОВ
Ответственный секретарь – докт. тех. наук, с.н.с. М.М. ХАМДАМОВ

Мирсаидов М. д.т.н., проф., акад. АН РУз (Ташкент), Азимов Д. д.т.н., проф. (США), Панахов Г.М. д.т.н., проф., член-корр. НАНА (Баку), Алдошин Н.В. д.т.н., проф. (Москва), Паровик Р. д.ф.-м.н. (Петропавловск-Камчатский), Быковцев А.С. д.ф.-м.н., проф. (США), Старовойтов Э.И. д.ф.-м.н. (Гомель, Беларусь), Ватин Н.И. д.т.н., проф. (Санкт-Петербург), Тохиров Ш.М. к.ф.-м.н. (США), Мамасаидов М.Т. д.т.н., проф., акад. НАН КР (Ош), Шардаков И.Н. д.ф.-м.н., проф. (Пермь), Казанцев С.П. д.т.н., проф. (Москва), Кузнецов С.В. д.ф.-м.н., проф. (Москва), Матвеенко В.П. д.т.н., проф., акад. РАН (Пермь), Зубарев А.Ю. д.ф.-м.н., проф. (Екатеринбург), Абдусаттаров А. д.т.н., проф. (Ташкент), Абдикаримов Р.А. д.ф.-м.н., проф. (Ташкент), Алимухамедов Ш.П. д.т.н., проф. (Ташкент), Сирожиддинов З. д.т.н., проф. (Самарканд), Дусматов О.М. д.ф.-м.н., проф. (Самарканд), Ахмедов А.Б. д.ф.-м.н., проф. (Ташкент), Сагдиев Х.С. к.т.н. (Ташкент), Ризаев А.А. д.т.н., проф. (Ташкент), Бахадиров Г.А. д.т.н., проф. (Ташкент), Тухтакузиев А.Т. д.т.н., проф. (Ташкент), Юлдашев Ш.С. д.т.н., проф. (Наманган), Исмоилова С.И. д.т.н., проф. (Ташкент), Наврузов К. д.ф.-м.н., проф. (Хорезм), Хужаев И.К. д.т.н., проф. (Ташкент), Хужаёров Б.Х. д.ф.-м.н., проф. (Самарканд), Маликов З.М. д.т.н., проф. (Ташкент), Мавланов Т.М. д.т.н., проф. (Ташкент), Сафаров И.И. д.ф.-м.н., проф. (Ташкент), Усаров М.К. д.ф.-м.н., проф. (Ташкент), Тешаев М.Х. д.ф.-м.н., проф. (Бухара), Игамбердиев А.К. д.т.н., проф. (Ташкент), Маткаримов П.Ж. д.т.н., проф. (Наманган), Йўлдошев А.Т. д.т.н., проф. (Ташкент), Мухаммадиев Д.М. д.т.н., проф. (Ташкент), Маматов Ф.М. д.т.н., проф. (Кашкадарья), Ювмитов А.С. д.т.н., с.н.с. (Ташкент), Шермухаммедов У. д.т.н., проф. (Ташкент), Умархонов С.И. к.т.н., с.н.с. (Ташкент).

Адрес редакции:
100125, Ташкент, Академгородок, Дурмон йули, 40.
Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз

Телефон: +99855 520-02-45
+99855 520-04-46
E-mail: instmechofficial@gmail.com

Журнал зарегистрирован Агентством по печати и информации Республики Узбекистан 22.12.2006 г.
Регистрационный номер 0050.

Номер одобрен на заседании редакционной коллегии журнала 25.03.2026
Сдано в набор 15.03.2026. Подписано в печать 29.03.2026.
Формат 60 × 84 1/8. Гарнитура Times New Roman. Ризография.
Усл.- печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 6.82. Тираж 130.
Цена договорная.

Отпечатано в типографии ООО ”Munis design group”:
100170, г. Ташкент, ул. Буз-2, презд, дом 17-А.

© Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, 2026 г.

Содержание

Мирсаидов М.М., Ярашов Ж.А., Ишматов А.Н., Тошматов Э.С., Уринов Б.Х.
Влияние упругопластических свойств на прочностные характеристики грунтовых плотин 5

Москвитин Г. В., Архипов В. Е., Пугачев М. С.
Получение безызносных покрытий на основе меди и цинка газодинамическим методом 20

Султанов К. С., Быковцев А. С., Ан Е. В.
Анализ чувствительности дистанционного зондирования смещений гребней плотин в Узбекистане 30

Мардонов Б. М., Аманов С. С.
Упругие и упруго-пластические волны в стержнях, взаимодействующих с внешней средой 45

Усаров М.К., Исаев Г.У., Шамсиев Д.К.
Пространственные модели и методы расчета многоэтажных зданий при продольных сейсмических воздействиях 58

Тожиев Р.И., Коршунова Н.А., Рузматов М.И.
Аналитические решения для участков промежуточной тяги в гравитационном поле Гарфинкеля 69

Усанов Ф.А.
Поперечные колебания пластины под действием нормальных нагрузок в рамках бимоментной теории 82

Эргашев Д.Й., Хужаев И.К., Хужаев Ж.И.
Эффективность ребра, параллельного образующей цилиндрического канала 95

Маликов З.М., Йулдашев А.Т., Нуритдинов А.А.
Численное моделирование процессов пылеулавливания в системе из четырёх циклонов с использованием модели турбулентности GEKO в ANSYS Fluent . 105

Мадалиев М.Э.
Применение метода решётчатого Больцмана для моделирования обтекания квадратного цилиндра 119

Хамдамов М.М., Равшанов Ш.А., Чуллиев Ш.И.
Численное моделирование ламинарного тепломассообмена в цилиндрическом канале на основе модифицированного алгоритма SIMPLE 129

Аимбетов И.К., Аимбетов К.Ш.
Деформируемость суглинков, слагающих тело северной дамбы Междуреченского водохранилища при трехосном сжатии 142

Мухаммадиев Д.М., Абзоиров О.Х., Жумаев Н.К., Жамолова Л.Ю., Примов Б.Х.
Расчет осесимметричного изгиба пильного диска волокноотделителя в системе полярной координаты 150

"Светлой памяти выдающихся учёных и наставников" 159

Contents

Mirsaidov M.M., Yarashov J.A., Ishmatov A., Toshmatov E.S., Urinov B.Kh.
Effect of elasto-plastic properties on the strength characteristics of earth-fill dams 5

Moskvitin G. V., Arkhipov V. E., Pugachev M. S.
Production of Non-Corrosive Coatings Based on Copper and Zinc by Gasdynamic Method 20

Sultanov K. S., Bykovtsev A. S., An E. V.
Sensitivity analysis of remote sensing of dam crest displacements in Uzbekistan . 30

Mardonov B.M., Amanov S.S.
Elastic and Elastoplastic Waves in Rods Interacting with an External Medium. . 45

Usarov M.K., Isayev G.U., Shamsiyev D.K.
Spatial models and methods for calculating multi-story buildings under longitudinal seismic impacts 58

Tojiyev R.I., Korshunova N.A., Ruzmatov M.I.
Analytical solutions for intermediate thrust arcs in the Garfinkel gravitational field 69

Usanov F. A.
Transverse oscillations of a plate under normal loads within the framework of bimoment theory 82

Ergashev D.Y., Khujaev I.K., Khujaev J.I.
Efficiency of a fin parallel to the generator of a cylindrical channel 95

Malikov Z.M., Yuldashev A.T., Nuritdinov A.A.
Numerical Simulation of Dust Collection Processes in a Four-Cyclone System Using the GEKO Turbulence Model in ANSYS Fluent 105

Madaliev M.E.
Application of the lattice Boltzmann method to model flow around a square cylinder 119

Hamdamov M.M., Ravshanov Sh.A., Chulliev Sh.I.
Numerical Simulation of Laminar Heat and Mass Transfer in a Cylindrical Channel using a Modified SIMPLE Algorithm 129

Aimbetov I.K., Aimbetov K.SH.
Deformability of loams composing the body of the northern dam of the Mezhrechenskoye reservoir under triaxial compression 142

Mukhammadiev D.M., Abzoirov O.Kh., Jumaev N.K., Zhamolova L.Yu., Primov B.Kh.
Calculation of axisymmetric bending of a saw blade of the saw gin in polar coordinate 150

In Blessed Memory of Outstanding Scientists and Mentors 159

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ НА ПРОЧНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРУНТОВЫХ ПЛОТИН

[1,2*]***Мирсаидов М.М.,*** [1,2]***Ярашов Ж.А.,*** [1]***Ишматов А.Н.,*** [1,2]***Тошматов Э.С.,*** [1]***Уринов Б.Х.***

*theormir@mail.ru

[1]Национальный исследовательский университет "Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства" (НИУ "ТИИИМСХ"), Узбекистан

[2]Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан

В работе разработаны математическая модель, методика и алгоритм оценки напряженно-деформированного состояния (НДС) грунтовых плотин с учетом упругопластических свойств материала. Расчеты реализованы методом переменных параметров упругости с учетом воздействия массовых сил и гидростатического давления. На примере Сохской плотины исследовано НДС сооружения при различных уровнях наполнения водохранилища. В результате выявлены новые механические эффекты, обусловленные неоднородностью конструкции и упругопластичностью грунта.

Ключевые слова: грунтовая плотина, напряженно-деформированное состояние, неоднородные особенности конструкции, упругопластические свойства грунта, уровень заполнения водохранилища, метод упругих решений.

Цитирование: *Мирсаидов М.М., Ярашов Ж.А., Ишматов А.Н., Тошматов Э.С., Уринов Б.Х.* Влияние упругопластических свойств на прочностные характеристики грунтовых плотин // Проблемы механики. – 2026. – №1(35). – С. 5-20.

1 Введение

Грунтовые плотины играют ключевую роль в управлении водными ресурсами и развитии экономики. Являясь объектами повышенной опасности, такие сооружения требуют строгого соблюдения норм безопасности, поскольку их разрушение влечет за собой катастрофические последствия.

В настоящее время значительная часть мирового фонда гидротехнических сооружений эксплуатируется сверх расчетного срока без надлежащей реконструкции. Более того, многие действующие плотины проектировались на основе упрощенных методов, не учитывающих факторы деградации материала, что в сочетании с длительной эксплуатацией повышает риск возникновения аварийных ситуаций [4].

Разработка методик, алгоритмов и программных комплексов для оценки состояния грунтовых плотин с учетом их фактических технических параметров является актуальной научной и практической задачей. Анализ показывает, что задача оценки прочности грунтовых плотин с учетом их фактического состояния и разнообразия свойств материалов при внешних воздействиях остается нерешенной. Точность таких прогнозов зависит не только от корректности описания свойств грунта, но и от адекватного учета конструктивных особенностей объекта. Это обуславливает необходимость разработки совершенных моделей и численных методов, позволяющих эффективно использовать современные вычислительные мощности для решения сложных задач прочности без существенных ограничений.

На сегодняшний день для описания физического состояния грунтов предложено множество теорий, различающихся сложностью реализации в конкретных задачах. Одной из ключевых проблем при оценке надежности грунтовых плотин остается учет упругопластических свойств материала, проявляющихся под воздействием различных эксплуатационных факторов [1–4, 10, 11, 23, 24, 27, 28].

В последнее время при оценке напряженно-деформированного состояния грунтовых плотин исследователи уделяют особое внимание учету неупругих свойств грунта. Например: – в работе [12] приводятся нелинейные модели, удовлетворительно описывающие упругопластические свойства грунтовых материалов;

– в работе [13] предложена численно-аналитическая процедура для анализа упругопластического “нелинейного” состояния грунтовой плотины при землетрясениях;

– в работе [14] для численного расчета грунтовых плотин использован конечный элемент, учитывающий влажные, невлажные и пластические свойства грунта. С использованием предложенной модели проведены расчеты трех плотин;

– в работе [15] моделируется поведение высоких плотин с упрочняющимся грунтом с использованием упругопластической модели;

– в работе [16] исследуется устойчивость откосов грунтовых плотин с использованием упругопластической модели;

– В работе [17] представлены результаты прогноза напряженно-деформированного состояния высокой грунтовой плотины в упругопластической постановке. Расчеты выполнены с учетом поэтапности возведения сооружения и наполнения водохранилища. Установлено, что работа плотины с вертикальной диафрагмой при полном напоре характеризуется горизонтальным смещением низовой упорной призмы;

– в работах [1, 27, 28] приводится оценка прочности и устойчивости откосов плотины с учетом пластических деформаций, поэтапным возведением сооружения и просачиванием воды через тело плотины;

– в работах [18, 19] предложена методика численного исследования упругопластического деформирования тел с учетом конечных деформаций. При этом предполагается, что грунтовая среда при деформировании подчиняется закону сухого трения. Полная деформация представляется в виде суммы пластической и упругой деформации. Определяющие соотношения упругого деформировании записываются в виде закона Гука;

– в работе [20] предложена геомеханическая модель ограждающего насыпного гидротехнического сооружения – плотины. В упругопластической постановке методами компьютерного моделирования, исследована закономерность деформирования и смещения тела сооружения;

– в работе [21] решена двумерная задача оценки напряженно-деформированного состояния откоса в упругопластической постановке с использованием численного метода;

– в работе [22] рассмотрена возможность использования структурно неоднородной упругопластической расчетной модели для описания деформационного поведения водонасыщенных глинистых грунтов.

Наряду с этим в работах [5–8, 25, 26, 29–31, 33–35] исследовано напряженно - деформированное состояние и динамическое поведение различных конструкций с учетом особенностей деформирования.

Вышеуказанные работы представляют лишь часть исследований, в которых при оценке напряженно-деформированного состояния и устойчивости откосов, наряду с упругими характеристиками, учитываются упругопластические свойства грунта.

Анализ публикаций показывает, что подходы к определению прочностных параметров сооружений существенно различаются, при этом каждая теория имеет свои преимущества и ограничения.

На сегодняшний день универсальная концепция, позволяющая комплексно учитывать особенности различных грунтов и типов нагружения, всё еще находится в стадии формирования. Адекватная оценка прочностных параметров плотин с учетом упругопластичности остается недостаточно изученной и требует дальнейших исследований. Таким образом, данная проблема сохраняет свою актуальность и требует поэтапного решения.

2 Модели, методы и алгоритмы для оценки напряженно-деформированного состояния грунтовых плотины с учетом упругопластических свойств грунта

2.1. Математическая модель задачи Рассматривается оценка напряженно-деформированного состояния неоднородных грунтовых плотин (рис.1), в плоском деформированном состоянии занимающий поверхность $S = S_1 + S_2 + S_3$ с учетом упругопластических свойств грунта при различных статических воздействиях. Основание плотины Σ_0 принято жестко защемленным, поверхность низового откоса Σ_3 – свободной от напряжений. На часть верхового откоса Sp действует гидростатическое давление воды $\boldsymbol{p}$.

Грунтовый массив плотины на различных участках рассматривается в упругой или упругопластической постановке. При расчете учитываются собственный вес (массовые силы $\boldsymbol{f}$) сооружения и гидростатическое давление $\boldsymbol{p}$ воды на поверхность Sp.

Задача состоит в определении поля перемещений и напряжений, возникающих в теле плотины (рис.1) под действием массовых сил $\boldsymbol{f}$ и гидростатического давления воды $\boldsymbol{p}$ с учетом упругопластических свойств грунта в случае плоского деформированного состояния сооружения.

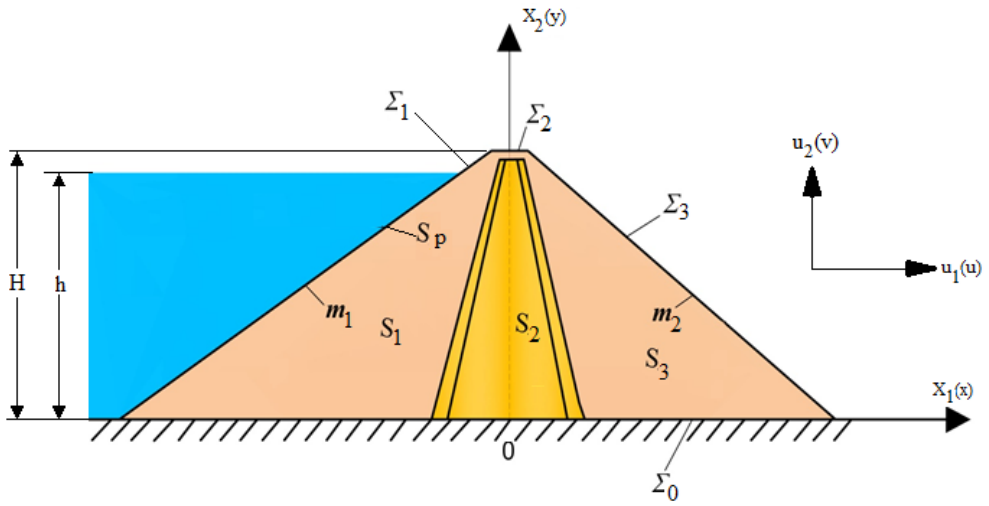


Рис. 1 Плоская модель неоднородной грунтовой плотины

Для моделирования процесса деформирования грунтовой плотины (рис.1) используется:

– вариационное уравнение, основанное на принципе возможных перемещений:

$$-\int\limits_{S_1}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dS-\int\limits_{S_2}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dS-\int\limits_{S_3}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dS+$$
$$+\int\limits_{S_1+S_2+S_3}\boldsymbol{f}\delta\boldsymbol{u}dS+\int\limits_{S_P}\boldsymbol{p}\,\delta\boldsymbol{u}dS=0, \tag{1}$$

– однородное кинематичемкое условия

$$\boldsymbol{x}\in\sum\nolimits_o:\boldsymbol{u}=0 \tag{2}$$

При этом физические свойства материала сооружения описываются соотношениями между напряжениями σ_{ij} и деформациями ε_{ij} вида [5]:

$$\sigma_{ij}=\lambda_n\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2\mu_n\varepsilon_{ij} \tag{3}$$

и связь между компонентами тензора деформаций и вектором перемещений линейными соотношениями Коши [5]

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{4}$$

Здесь $\boldsymbol{u}$, ε_{ij}, σ_{ij} – соответственно, компоненты вектора перемещений, тензоры деформаций и напряжений; $\delta\boldsymbol{u}$, $\delta\varepsilon_{ij}$ – изохронные вариации компонентов перемещений и деформаций; $\boldsymbol{f}$ – вектор массовых сил; $\boldsymbol{p}$ – гидростатического давления воды; индекс $n=1,2,3$, означает отдельные неоднородные части плотины, к которой относится данная характеристика.

λ_n и μ_n являются константами Ламе, которые определяются через модуль Юнга E_n и коэффицента Пуассона ν_n следующим образом:

$$\lambda_n=E_n\nu_n\backslash((1+\nu_n)(1-2\nu_n));\ \mu_n=E_n\backslash(2(1+\nu_n)). \tag{5}$$

Гидростатическое давление воды $\boldsymbol{p}_c$, определяемое по формуле

$$\boldsymbol{p}_c=\rho_0 g(h-y), \tag{6}$$

Рассматриваемое сооружение существенно неоднородное в том смысле, что физические свойства его частей сильно различаются между собой.

Решаемая задача рассматривается в рамках плоского деформированного состояния сооружений, т.е. вектор перемещений в системе координат $\boldsymbol{x}=\{x_1,x_2\}=\{x,y\}$имеет две компоненты $\boldsymbol{u}=\{u_1,u_2\}=\{u,\mathrm{v}\}$, во всех соотношениях $i,j,k=1,2$.

В случае, когда материал n-ой части плотины (рис.1) упругий, тогда связь между компонентами тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} выражается через обобщенный закон Гука (3).

В случае, когда материал упругопластический, для описания уравнения состояния грунтовой среды используется гипотеза энергии формоизменения, где переход из упругого состояния в пластическое, в рассматриваемой точке грунтовой среды

происходит тогда, когда в данной точке $\sigma_i = \sigma_T$. При этом состояние среды в различных частях рассматриваемой плотины описывается по-разному (упругому или упругопластическому закону), в зависимости от того, преодолен предел текучести материала – σ_T или нет.

Здесь σ_T – нормальные напряжения в пределе текучести материала.

В упругопластическом случае, для определения константы в (5) (т.е.: E_n, ν_n, μ_n) используются следующие переменные параметры упругости E_n^*, ν_n^*, μ_n^*, определяемые следующим образом [6, 25, 26]:

$$E_n{}^* = \frac{\frac{\sigma_i^*}{\varepsilon_i}}{1 + \frac{1-2\nu_n}{3E_n}\frac{\sigma_i^*}{\varepsilon_i}}; \tag{7}$$

$$\mu_n{}^* = \frac{\sigma_i^*}{3 \cdot \varepsilon_i};$$

$$\nu_n{}^* = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1-2\nu_n}{3E_n}\frac{\sigma_i^*}{\varepsilon_i}}{1 + \frac{1-2\nu_n}{3E_n}\frac{\sigma_i^*}{\varepsilon_i}}$$

Связь между "переменными параметрами упругости"имеет тот же вид, что и для упругих констант E_n, ν_n, μ_n, т.е.:

$$\mu_n^* = \frac{E_n^*}{2(1+\nu_n^*)}. \tag{8}$$

Здесь интенсивности нормальных напряжений σ_i и деформаций ε_i определяются по формулам

$$\begin{gathered}\sigma_i = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}))^2 + (\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}))^2 + 6\,\sigma_{12}^2}, \\ \varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\nu)}\sqrt{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2 + \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \frac{3}{2}\varepsilon_{12}^2}.\end{gathered} \tag{9}$$

Изменённые физико–механические параметры (7)-(8), в каждой точке плотины (рис.1) определяются исходя из достигнутого деформированного состояния σ_i (интенсивность деформаций) и соответствующей ему σ_i^* (интенсивность напряжений) согласно выбранной диаграмме деформирования $\sigma_i^* = \sigma_i^*(\varepsilon_i)$ (рис.2), которая выбирается из экспериментальных данных для конкретных грунтов [2, 6, 7, 25].

Соотношения (1)–(9) представляют собой математическую модель для оценки напряженно-деформированного состояния грунтовых плотин с учетом упругопластических свойств грунта под действием массовых сил $\boldsymbol{f}$ и гидростатического давления воды p_c.

Теперь вариационную задачу для оценки напряженно-деформированного состояния грунтовых плотин (рис. 1) с учетом упругопластических свойств материала и неоднородных особенностей сооружения можно сформулировать следующим образом: необходимо определить поля перемещений $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$, деформаций $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$ и напряжений $\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$ в неоднородной упругопластической системе (рис. 1), возникающих под действием массовых сил ($\boldsymbol{f}$) и гидростатического давления (6) воды ($\boldsymbol{p}$), удовлетворяющие уравнению (1) с учетом (3)–(4), (7)–(9) и соответствующие кинематическим граничным условиям (2) при любом возможном перемещении $\delta\boldsymbol{u}$.

2.2. Метод и алгоритм решения задачи

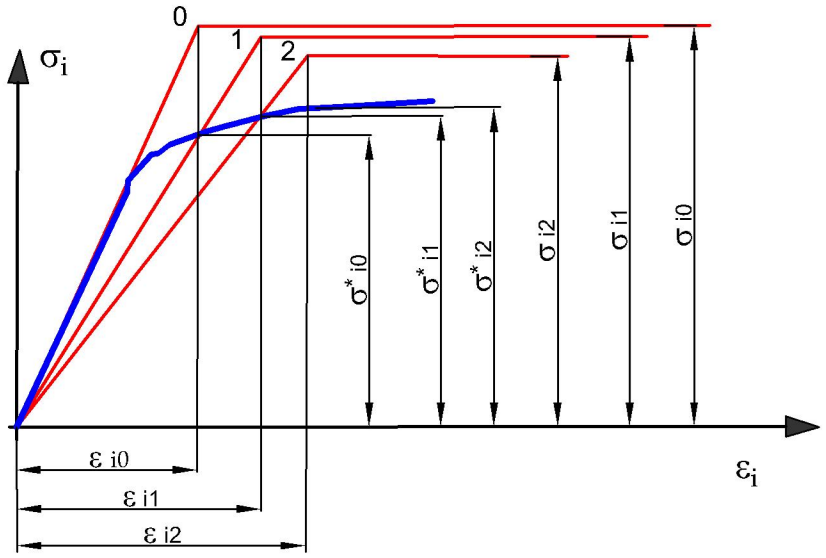


Рис. 2 Упругопластическая диаграмма деформирования материала и схема реализации метода переменных параметров упругости

Поставленная вариационная задача решается методом конечных элементов [9] (МКЭ). Задача (1)-(9) для сооружения (рис.1) с использованием процедуры метода конечных элементов сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений вида

$$[K(\sigma_i, \varepsilon_i)]\{u\} = \{F\}. \tag{10}$$

Здесь: $\{U\}$ – искомый вектор узловых перемещений; $\{F\}$ – вектор амплитуд суммарных внешних нагрузок (массовых сил, гидростатического давления воды и др.).

Отличие уравнения (10) от обычных систем линейных алгебраических уравнений состоит в том, что здесь коэффициенты уравнения (10), являющиеся элементами матрицы жесткости $[K(\sigma_i, \varepsilon_i)]$, зависят не только от геометрических и упругих параметров материалов, а также от достигнутого напряженно-деформированного состояния сооружения.

При этом расчет производится в несколько этапов. Решение уравнений (10) на каждом этапе процесса получается методом Гаусса или методом квадратного корня.

На первом этапе производится упругий расчет грунтового сооружения (рис. 1), находящегося в равновесии под действием приложенной нагрузки. Затем осуществляется переход ко второму этапу расчета, заключающемуся в анализе напряженно-деформированного состояния во всех конечных элементах, на которые разбито сооружение.

Если в отдельных конечных элементах интенсивность напряжений σ_i превысит предел текучести σ_T (σ_T – определяется из экспериментов для конкретных материалов), считается, что в них начинают развиваться пластические деформации, происходящие за счет изменения формы тела. Тогда с помощью (3)–(5), (7)–(9) для этих конечных элементов с учетом переменных параметров упругости составляются матрицы жесткости и затем – общая матрица $[K(\sigma_i, \varepsilon_i)]$ уравнения (10) для всего сооружения. Далее с учетом этого решается уравнение (10) с учетом упругопластических свойств материала для рассматриваемого сооружения.

Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута сходимость последовательности σ_i по всему сооружению в рамках заданной точности. Описанный метод

представляет собой метод переменных параметров упругости [6, 25]. Схема реализации, используемой метода переменных параметров упругости показана на рис.2.

Далее в случае с учетом упругопластического деформирование сооружении в каждой точке тела плотины напряженное состояние определяется по следующие формулам [5, 6, 25]:

$$\begin{gathered}\sigma_{11} = \frac{E_n^*(1-\nu_n^*)}{(1+\nu_n^*)(1-2\nu_n^*)}\varepsilon_{11} + \frac{\nu^* E_n^*}{(1+\nu_n^*)(1-2\nu_n^*)}\varepsilon_{22},\\ \sigma_{22} = \frac{E_n^*(1-\nu_n^*)}{(1+\nu_n^*)(1-2\nu_n^*)}\varepsilon_{22} + \frac{\nu_n^* E_n^*}{(1+\nu_n^*)(1-2\nu_n^*)}\varepsilon_{11},\\ \sigma_{22} = 2\mu_n^*\varepsilon_{12},\end{gathered} \tag{11}$$

где E_n^*, μ_n^*, ν_n^* – переменные параметры упругости, определяемые по формулам (7)–(8).

Далее с помощью вышеизложенной методики исследуется напряженно деформированное состояние грунтовых плотин с учетом упругопластических свойств грунта при различных воздействиях как без учета гидростатического давления воды, так и с учетом различных уровней заполнения водохранилища водой.

Ниже на основе изложенной методики исследуется напряженно-деформированное состояние грунтовых плотин с учетом упругопластических свойств материала. Рассматриваются варианты нагрузок как при отсутствии гидростатического давления, так и при различных уровнях наполнения водохранилища.

3 Исследование практической сходимости разработанного метода расчета на тестовом примере

Практическая сходимость метода упругопластического расчета исследована на модельной задаче (рис. 3), представляющей собой однородное сооружение, находящееся в плоском деформированном состоянии под действием массовых сил. Геометрические характеристики сооружения и усредненные физико-механические параметры грунта приняты: высота

сооружения $H = 86.5$ м; ширина гребня $b = 10$ м; коэффициенты откосов $m_1 = = 2.5$, $m_2 = 2.2$; модуль упругости $E = 3.07 \cdot 10^3$ МПа; удельный вес $\gamma = 1980$ кгс/м^3; коэффициент Пуассона $\nu = 0.36$. Упругопластические свойства грунта [7] описываются билинейной диаграммой деформирования (рис. 2) со степенью упрочнения $\bar{\lambda} = (1 - E_p/E) = 0.67$ и пределом текучести для грунта $\sigma_T = 4 \cdot 10^{-1}$ МПа. Здесь: E_p — угол наклона пластической части диаграммы.

Целью решения данной задачи является исследование сходимости результатов $(u_2, \sigma_i, \sigma_{11})$ в зависимости от числа разбиения модельного сооружения (рис. 3) на различное число N конечных элементов как для упругой, так и для упругопластической задачи. Для этого в сооружении выбирается несколько точек (например A, B, C) и при различных разбиениях на конечные элементы полученные в этих точках результаты $(u_2, \sigma_i, \sigma_{11})$ сопоставляются с результатами предыдущих расчетов. Результаты исследований представлены в табл. 1.

Здесь u_2 – вертикальное перемещение; σ_{11} – горизонтальное нормальное напряжение; σ_i – интенсивность нормальных напряжений рассматриваемой точки сооружения. Значения напряжений (σ_{11} и $\sigma_i \cdot 10^{-1}$) приводятся в МПа.

Данные табл. 1 показывают, что упругопластическое деформирование приводит к увеличению вертикальных перемещений точек сооружения. Удовлетворительная

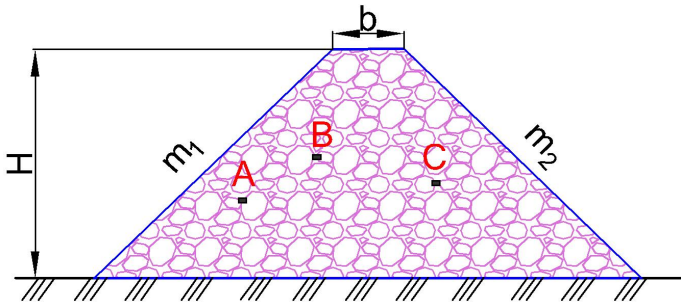


Рис. 3 Проверка сходимости решения в отдельных точках (т.е. в A, B, C точках) сооружения

точность обеспечивается при разбиении сооружения (рис. 3) не менее чем при $N =$ $= 350$ конечных элементов (табл. 1).

Таблица 1

Рассматриваемые точки сооружения	Типы величин	Упругие решения, полученные при различных числах разбиения на конечные элементы		
		$N = 280$	$N = 336$	$N = 576$
		3	4	5
1	2	Упругое решение		
A	u_2	-0.009660	-0.007812	-0.007517
	σ_i	69.5095	66.4327	66.4696
	σ_{11}	-31.6746	-33.7946	-33.8024
B	u_2	-0.01630	-0.01633	-0.01634
	σ_i	62.7767	57.9882	58.3452
	σ_{11}	-22.0782	-20.1421	-19.8845
C	u_2	-0.003849	-0.005693	-0.005505
	σ_i	30.1014	27.9418	26.3410
	σ_{11}	-22.9702	-20.7274	-21.2614
Упруго - пластическое решение				
A	u_2	-0.01686	-0.01559	-0.01595
	σ_i	64.3873	61.8528	61.7691
	σ_{11}	-36.2867	-38.6386	-39.2341
B	u_2	-0.02767	-0.03178	0.03236
	σ_i	57.8172	53.9147	52.8176
	σ_{11}	-22.6110	-21.5393	-21.0727
C	u_2	-0.00444	-0.007457	-0.007936
	σ_i	27.3915	30.9518	29.9756
	σ_{11}	-32.9834	-29.2085	-30.6014

Для проверки правильности полученных результатов рассматривалась также модель плотины с симметричным уклоном обоих откосов (т.е. $m_1 = m_2$). При этом равенство нулю касательного напряжения $\sigma_{12} = 0$ на оси симметрии подтверждает достоверность полученных результатов.

Полученные решения для модельных задач показали, что при необходимом количестве конечных элементов разработанная методика работает достаточно надежно при определении НДС плотины в плоской постановке с учетом как упругих, так и упругопластических свойств материала сооружений.

Эти результаты дают основание использовать разработанную методику, алгоритм и программы на ЭВМ при решении конкретных задач для грунтовых плотин.

4 Оценка прочностных параметров грунтовых плотин с учетом упругопластических свойств материала под действием массовых сил и гидростатического давления воды

В качестве конкретного примера рассмотрена оценка напряженно-деформированного состояния Сохской грунтовой плотины с учетом упругих и упругопластических свойств грунта под действием массовых сил и гидростатического давления воды при различном уровне заполнения водохранилища.

Сохская плотина расположена в северной предгорной части Алайского хребта в нижнем течении реки Сох. Основные проектные параметры плотины таковы: высота плотины 87,3 м, ширина гребня – 10,0 м, длина по гребню – 487,3 м, заложение откосов верховой призмы $m_1 = 2{,}5$, низовой призмы $m_2 = 2{,}2$.

Сохская плотина построена из местных материалов и является каменно-земляной с суглинистым ядром и боковыми упорными призмами из галечника. Центральное ядро плотины является вертикальным, симметричной формы с

шириной по верху 4,0 м, по основанию 47,15 м. Плотина построена из супесчано-суглинистых грунтов, и сооружение относится к 1-му классу.

Рекомендуемые проектные физико-механические характеристики материала имеют следующие значения: объемный вес – γ; сдвиговой модуль упругости – G; коэффициент Пуассона – μ. Для ядра: $\gamma = 1700$ кгс/м^3; $G = 282$ МПа; $\mu = 0.40$. Для упорной призмы: $\gamma = 2100$ кгс/м^3; $G = 316$ МПа; $\mu = 0.35$. Для крепления откоса: $\gamma = 1850$ кгс/м^3; $G = 310$ МПа; $\mu = 0.35$.

4.1. Упругий расчет

С помощью разработанной методики проведена оценка напряженно-деформированного состояния Сохской плотины с учетом однородных и неоднородных конструктивных особенностей сооружения в упругой постановке.

На рис. 4 представлены изолинии распределения интенсивности ε_i и компоненты сдвиговой деформации ε_{12}, а на рис. 5 представлены интенсивности нормальных σ_i и касательных напряжений σ_{12} Сохской плотины, полученные с учетом упругих свойств грунта. Анализ результатов показывает, что из-за более деформируемых свойств суглинка в ядре значения вертикальных деформаций в центральной части плотины увеличиваются по сравнению с однородными плотинами. При этом в нижней части плотины появляются большие ε_i (интенсивности деформации) (рис. 4).

Распределение касательных напряжений σ_{12} (рис. 5) повторяет характер распределения сдвиговых деформаций ε_{12} по сечению плотины (рис. 4). При этом нулевой уровень сдвиговых деформаций (рис. 4) наблюдается ближе к оси симметрии плотины (так как плотина имеет почти симметричные откосы); с удалением от оси сдвиговые деформации возрастают, достигая максимума в нижней части откосов.

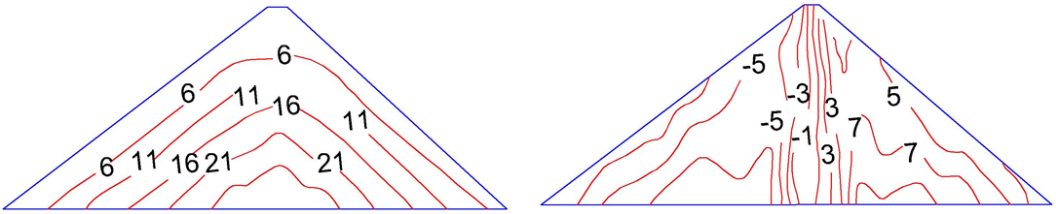


Рис. 4 Изолинии распределения интенсивности ε_i и компонента сдвиговой деформации ε_{12} в неоднородной Сохской плотине

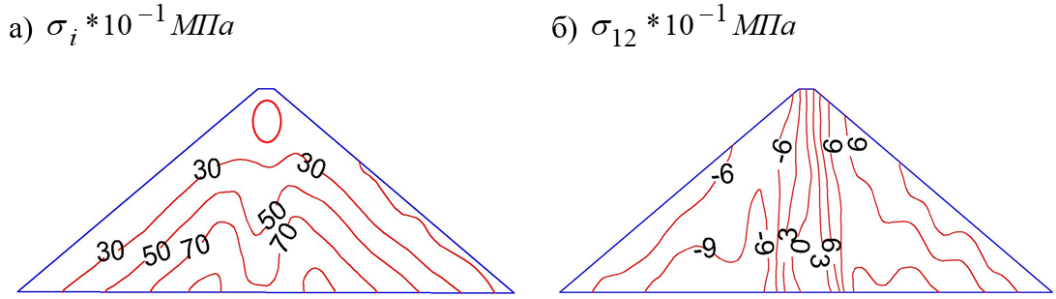


Рис. 5 Изолинии распределения интенсивности нормальных σ_i и касательных σ_{12} напряжений в неоднородной Сохской плотине

Анализ полученных результатов показал, что при учете неоднородных особенностей сооружения напряженное состояние плотины претерпевает значительные изменения по сравнению с однородным, которые выражаются в уменьшении интенсивности σ_i и вертикальных напряжений – σ_{22} в ядре плотины на $\approx 25\%$, увеличении касательных напряжений σ_{12} на $\approx 40\%$, а горизонтальных на $\sigma_{11} \approx 10\%$.

4.2.1. Упругопластический расчет

С помощью разработанной методики проведена оценка напряженно-деформированного состояния Сохской плотины с учетом однородных и неоднородных конструктивных особенностей сооружения в упругопластической постановке.

При оценке напряженно-деформированного состояния Сохской грунтовой плотины упругопластические свойства грунта учитываются согласно билинейной диаграмме деформирования $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ (рис. 2) со степенью упрочнения $\bar{\lambda} = (1 - E_p/E) = 0{,}75$, т.е. угол наклона пластической части E_p предполагается в четыре раза меньше наклона упругой части E: $E_p = E/4$ [5]. Предел текучести принимается, согласно [7], для материала ядра (суглинка) – $\sigma_T = 3 \cdot 10^{-1}$ МПа, а для материала опорных призм – в пределах $\sigma_T = (45 - 50) \cdot 10^{-1}$ МПа.

На рис. 6 представлены изолинии распределения интенсивности σ_i (а) и касательных – σ_{12} (б) напряжений Сохской плотины, полученные с учетом конструктивных особенностей и упругопластического свойства грунта под действием собственного веса. Сравнение этих результатов с результатами, полученными для тех же плотин в упругой постановке (рис. 5), показывает, что учет упругопластических свойств грунта призмы и ядра приводит к изменению значений и характера напряженного состояния плотины.

Учет упругопластических свойств грунта приводит к уменьшению значений интенсивности напряжений σ_i и вертикальных напряжений σ_{22} в ядре до $\approx 20\%$, усиливается арочный эффект, наблюдаемый в зоне ядра плотины. Причиной этого являет-

ся различие деформационных свойств и пределов текучести грунтов ядра и упорных призм. Горизонтальные напряжения σ_{11} увеличиваются до $5 \cdot 10^{-1}$ МПа, в основном, в верхней части плотины, в результате чего возможно изменение профиля плотины.

Значения вертикальных напряжений σ_{22} уменьшаются до $\approx 20\%$ в среднем и нижнем уровне ядра плотин. В откосных зонах касательные напряжения σ_{12} увеличиваются на $(5-6) \cdot 10^{-1}$ МПа, что также может привести к изменению формы профиля и к уменьшению коэффициента запаса прочности откосов плотин.

На рис. 7 показаны линии равных уровней интенсивности ε_i и сдвиговой деформации ε_{12} в неоднородной Сохской плотине с учетом упругопластических свойств грунта.

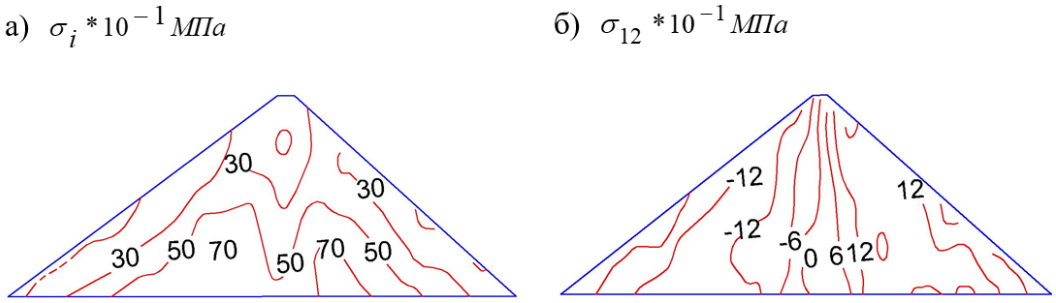


Рис. 6 Изолинии распределения интенсивности σ_i и касательных напряжений σ_{12} в неоднородной Сохской плотине, полученные с учетом упругопластических свойств материала

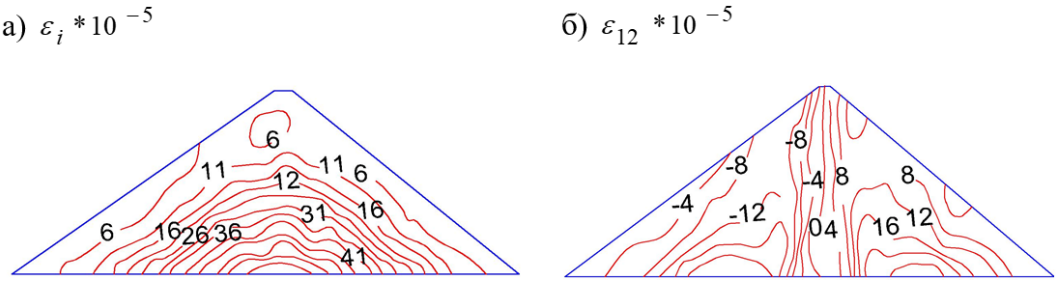


Рис. 7 Изолинии распределения интенсивности ε_i и сдвиговой деформации ε_{12} в неоднородной Сохской плотине с учетом упругопластических свойств грунта

Анализ полученных результатов (рис. 4 и 7) показывает, что учет упругопластических свойств грунта приводит к появлению дополнительной деформации на наиболее напряженных участках внутри тела плотины. Вблизи же поверхности откосов и гребня пластические деформации не появляются. Несмотря на это, в откосных зонах возникают значительные сдвиговые деформации ε_{12}.

Наряду с этим были исследованы возникающие главные нормальные σ_1, σ_2 и максимальные касательные напряжения $\tau_{\max}$ для Сохской плотины с учетом упругих и упругопластических свойств грунта, которые показали, что учет упругопластических свойств грунта приводит к уменьшению напряжений в теле плотины и сглаживанию арочного эффекта в зоне ядра. При этом величина главного напряжения σ_1 в зонах верхового и низового откосов незначительно уменьшается. В большей степени уменьшается главное напряжение σ_2 в зонах откосов (до $\approx$ 10–17%) и в ядре (до

$\approx$ 15–25%). Значение максимального касательного напряжения $\tau_{\max}$ в откосных зонах незначительно увеличивается вблизи ядра, и уменьшается на $\approx$ 20–50% в ядре.

Полученные результаты также показали, что с уменьшением наклона пластического участка в диаграмме деформирования $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ грунта разница в результатах решения упругопластической задачи по сравнению с решением упругой задачи будет значительней.

Поэтому необходим обоснованный подход к выбору закона деформирования грунта.

4.3. Упруго-пластический расчет с учетом уровня заполнения водохранилища

С помощью разработанной методики проведена оценка напряженно деформированного состояния Сохской плотины с учетом неоднородных конструктивных особенностей сооружения, упруго-пластических свойств грунта и различного уровня заполнения водохранилища водой. При этом полученное напряженно-деформированное состояние плотины при каждом уровне заполнения водохранилища сравнивалось с результатами, полученными в пункте 4.2 без учета заполнения водохранилища водой.

На рис. 8 приведены изолинии распределений интенсивности нормальных σ_i (а) и касательных σ_{12} (б) напряжений Сохской плотины, полученные с учетом упругопластических свойств грунта при полностью заполненном водохранилище.

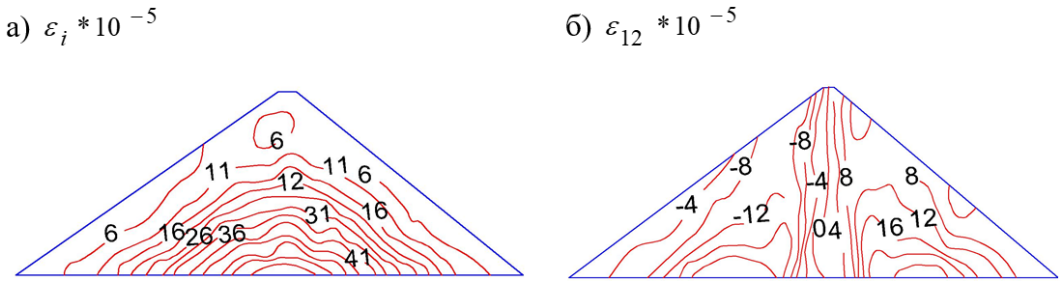


Рис. 8 Изолинии распределения интенсивности σ_i (а) и касательных σ_{12} (г) напряжений в Сохской плотине, полученные с учетом упругопластических свойств грунта при полном заполнении водохранилища

При полностью заполненном водохранилище (рис. 8) происходит перераспределение напряженно-деформированного состояния плотины, нарушается симметричный характер распределения изолиний напряжений и существенно изменяются значения компонентов напряжений. Интенсивность напряжений σ_i (рис. 8) в Сохской плотине увеличивается до $\approx$ 70–100%.

относительно результатов, полученных без учета влияния воды.

При этом изменения наблюдаются, в основном, в верхней упорной призме. Горизонтальные напряжения σ_{11} изменяются по всему профилю плотины, они увеличиваются от $\approx$ 10–120%, причем наибольшая разница в результатах относится к откосам верхней призмы.

Вертикальные напряжения σ_{22} увеличиваются до $\approx$ 70–80% и наибольшая разница относится к нижней части верхнего откоса. Также существенно изменяется картина распределения касательных напряжений σ_{12} по профилю плотины. Значения касательных напряжений в нижней призме увеличиваются до $\approx$ 15–20%. Эти явления нежелательны, так как могут произойти оползни (нарушение устойчивости) откоса нижней призмы. Поэтому в большинстве случаев наряду с оценкой устойчивости вер-

хового откоса оценивается и устойчивость низового откоса плотины. Необходимость оценки устойчивости низового откоса подтверждается результатами наблюдения последствий сильных землетрясений [2].

5 Заключение

1. Разработан комплекс (математическая модель, методика и алгоритм) для оценки напряженно-деформированного состояния грунтовых плотин с учетом упругопластических свойств материала. Расчетная схема реализована методом переменных параметров упругости и учитывает воздействие массовых сил и гидростатического давления.

2. Проведено исследование напряженно-деформированного состояния Сохской грунтовой плотины с учетом её конструктивных особенностей и упругопластических характеристик грунта при различных уровнях наполнения водохранилища.

3. Установлено, что учет упругопластических свойств грунта приводит к следующим результатам: – существенному изменению напряженно-деформированного состояния сооружения в сравнении с расчетами в чисто упругой постановке;

– возникновению пластических деформаций сдвига в откосных зонах и появлению дополнительных деформаций в наиболее нагруженных внутренних областях плотины (при этом вблизи гребня и поверхностей откосов деформации остаются незначительными);

– снижению уровня напряжений в теле плотины и нивелированию (сглаживанию) арочного эффекта в зоне ядра.

4. Анализ совместного влияния упругопластичности и уровня воды в водохранилище показал:

– при полном наполнении водохранилища характер распределения касательных напряжений существенно меняется: их рост наблюдается не только в верховой, но и в низовой упорной призме;

– максимальные значения интенсивности напряжений фиксируются в нижней части верхового откоса в зоне примыкания к ядру плотины.

Литература

[1] *Zaretsky Yu.K., Lombardo V.N.* Статика и динамика грунтовых плотин // Москва: Энергоиздат. – 1983. – 256 с.

[2] *Krasnikov N.D.* Сейсмостойкость гидротехнических сооружений из грунтовых материалов // Москва: Энергоиздат. – 1981. – 240 с.

[3] *Lyakhter V.M., Ivashchenko I.N.* Сейсмостойкость грунтовых плотин // Москва: Наука. – 1986. – 233 с.

[4] *Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z.* Theory and Methods of Strength Assessment of Earth Dams // Lambert Academic Publishing. – Saarbrucken, Germany. – 2015. – 341 p.

[5] *Александров А.В., Потапов В.Д.* Основы теории упругости и пластичности // Москва: Высшая школа. – 1990. – 400 с.

[6] *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести // Москва: Машиностроение. – 1975. – 400 с.

[7] *Баркан Д.Д.* Динамика оснований и фундаментов // Москва: Стройвоениздат. – 1948. – 411 с.

[8] *Ильюшин А.А.* Пластичность // Москва: Гостехиздат. – 1948. – 376 с.

[9] *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и МКЭ // Москва: Стройиздат. – 1982. – 448 с.

[10] *Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Sadullaev Sh.A.* An assessment of stress-strain state of earth dams with account of elastic-plastic, moist properties of soil and large strains // Magazine of Civil Engineering. – 2013. – Vol. 40. – No. 5. – P. 59–68. doi: http://dx.doi.org/10.5862/MCE.40.7

[11] *Afiri R., Gabi S.* Finite element slope stability analysis of Souk Tleta dam by shear strength reduction technique // Innovative Infrastructure Solutions. – 2018. – Vol. 3. – P. 6. doi: http://dx.doi.org/10.1007/s41062-017-0108-1

[12] *Ескин Ю.М., Красников Н.Д., Эйслер Л.А.* Расчет сейсмонапряженного состояния и деформаций земляных плотин с учетом упруго-пластических свойств грунтов // Известия ВНИИГ. – 1977. – No. 118. – С. 24–34.

[13] *Bakhodirov A.A., Ismailova S.I., Sultanov K.S.* Dynamic deformation of the contact layer when there is shear interaction between a body and the soil // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2015. – Vol. 79. – No. 6. – P. 587–595. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.04.005

[14] *Khoei A.R., Azami A.R., Haeri S.M.* Implementation of Plasticity Based Models in Dynamic Analysis of Earth and Rockfill Dams // Computers and Geotechnics. – 2004. – Vol. 31. – No. 5. – P. 384–409.

[15] *Sukkarak R., Pramthawee P., Jongpradist P.* A modified elasto-plastic model with double yield surfaces // KSCE Journal of Civil Engineering. – 2017. – Vol. 21. – No. 3. – P. 734–745.

[16] *Орехов В.В.* Устойчивость грунтовой плотины с вертикальной диафрагмой // Вестник МГСУ. – 2016. – No. 1. – С. 143–149.

[17] *Shahba S., Soltani F.* Analysis of Stress and Displacement of Taham Earth Dam // Indian Journal of Science and Technology. – 2016. – Vol. 9. – No. 45.

[18] *Султанов Л.У., Давидов Р.Л.* Численное исследование больших деформаций методом конечных элементов // Инженерно-строительный журнал. – 2013. – No. 9. – С. 64–68.

[19] *Султанов Л.У., Бережной Д.В., Карамов А.В.* Расчет грунтовых массивов с учетом дилатансии на основе метода конечных элементов // Инженерно-строительный журнал. – 2014. – No. 4. – С. 3–9.

[20] *Калашник Н.А.* Компьютерное моделирование насыпной земляной плотины как прототипа ограждающей дамбы хвостохранилища // Международный научно-исследовательский журнал. – 2012. – No. 4(4). – С. 54–55.

[21] *Кусбекова М.Б., Жамбакина З.М., Пермяк М.Б.* Напряженно-деформированное состояние откоса // Научные исследования. – 2017. – No. 5(16). – С. 15–17.

[22] *Панов С.И., Гольдин А.Л.* Деформации глинистых грунтов при циклическом нагружении // Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. – 2016. – Vol. 280. – С. 79–86.

[23] *Bakhodirov A.A., Sultanov K.S.* Waves in a Viscoelastic Bar Surrounded by Soils under Smooth Loading // Mechanics of Solids. – 2014. – Vol. 49. – No. 3. – P. 349–359. doi: http://dx.doi.org/10.3103/S002565441403011X

[24] *Sultanov K.S., Bakhodirov A.A.* Laws of Shear Interaction at Contact Surfaces Between Solid Bodies and Soil // Soil Mechanics and Foundation Engineering. – 2016. – Vol. 53. – No. 2. – P. 71–74. doi: http://dx.doi.org/10.1007/s11204-016-9367-7

[25] *Биргер И.А.* Некоторые общие методы решения задач теории пластичности // Прикладная механика. – 1951. – Vol. XV. – No. 6. – С. 765–770.

[26] *Биргер И.А.* Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести // Известия АН. Механика–машиностроение. – 1965. – No. 2. – С. 113–119.

[27] *Amnyattalab J., Rezaie H.* Study of the effect of seepage through the body of earth dam on its stability // International Journal of Environmental Science and Technology. – 2017. doi: http://dx.doi.org/10.1007/s13762-017-1549-y

[28] *Lan Qi, Qizhen Chen, Jiancheng Cai* Effect of seismic permanent deformation on safety and stability of earth-rock dam slope // Transactions of Tianjin University. – 2015. – Vol. 21. – No. 2. – P. 167–171.

[29] *Mirsaidov M.M., Toshmatov E.S.* Spatial stress state and dynamic characteristics of earth dams // Magazine of Civil Engineering. – 2019. – No. 89(5). – P. 3–15. doi: http://dx.doi.org/10.18720/MCE.89.1

[30] *Усаров М.К.* Изгиб ортотропных пластин с учетом бимоментов // Инженерно-строительный журнал. – 2015. – No. 1(53). – С. 80–90.

[31] *Khudayarov B.A., Turaev F.Z.* Mathematical simulation of nonlinear oscillations of viscoelastic pipelines conveying fluid // Applied Mathematical Modelling. – 2019. – Vol. 66. – P. 662–679.

[32] *Elgamel A.M., Abdelghaffar A.M.* Earthquake induced plastic deformation of earth dams // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. – 1985. – Proc. 2nd Int. Conf. – P. 45–54.

[33] *Khudayarov B., Komilova K., Turaev F.* Numerical Modeling of pipes conveying gas-liquid two-phase flow // E3S Web of Conferences. – 2019. – Vol. 97. – P. 05022.

[34] *Toshmatov E., Usarov M., Usarov D.* Dynamic methods of spatial calculation of structures based on a plate model // E3S Web of Conferences. – 2019. – Vol. 97. – P. 04065. doi: http://dx.doi.org/10.1051/e3sconf/20199704065

[35] *Мирсаидов М., Маткаримов П.Ж.* Динамическая задача для грунтовых сооружений, взаимодействующих с жидкостью // Доклады АН РУз. – 2007. – No. 1. – С. 25–28.

UDC 539.3

EFFECT OF ELASTO-PLASTIC PROPERTIES ON THE STRENGTH CHARACTERISTICS OF EARTH-FILL DAMS

[1,2*]***Mirsaidov M.M.,*** [1,2]***Yarashov J.A.,*** [1]***Ishmatov A.,*** [1,2]***Toshmatov E.S.,*** [1]***Urinov B.Kh.***

*theormir@mail.ru

[1]"Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers"National Research University (TIIAME NRU), Tashkent, Uzbekistan

[2]Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T.Urazbaev of the Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

In this paper, a mathematical model is developed, methods and algorithms for estimating the stress-strain state of soil dams, taking into account the elastic-plastic properties of the soil under the influence of mass forces and hydrostatic pressure of water in reservoirs using the method of variable elasticity parameters. The stress-strain state of the Sokha soil dam has been studied, taking into account the elastic-plastic properties of the soil and the structural features of the structure at different reservoir filling levels. When studying the stress-strain state of soil dams under the influence of mass forces and hydrostatic pressure of water, taking into account the elastic-plastic properties of the soil and the heterogeneous features of the dams, various new mechanical effects revealed.

Keywords: earth dams, stress-strain state, structural heterogeneities, elastic-plastic properties of soil, reservoir filling level, method of elastic solutions.

Citation: Mirsaidov M.M., Yarashov J.A., Ishmatov A., Toshmatov E.S., Urinov B.Kh. 2026. Effect of elasto-plastic properties on the strength characteristics of earth-fill dams. *Problems of mechanics.* 1(35): 5-20.

УДК 621.793.7

ПОЛУЧЕНИЕ БЕЗЫЗНОСНЫХ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ МЕДИ И ЦИНКА ГАЗОДИНАМИЧЕСКИМ МЕТОДОМ*

[1]***Москвитин Г. В.,*** [1]***Архипов В. Е.,*** [1]***Пугачев М. С.***
GVMoskvitin@yandex.ru
[1]Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (ИМАШ РАН), Москва, Россия

В работе исследуются покрытия меди и меди - цинка (типа «латуни») полученные методом «холодного» газодинамического напыления. Методом рентгеноструктурного фазового анализа выявлено, что цинк является основным элементом, «захватывающим» частицы корунда, но он не может «удержать» частицы корунда под воздействием сопряжённой поверхности, отделившись от поверхности покрытия, они оказывают значительное влияние на процессы трения в трибологической паре. Предложены два механизма, описывающие влияние на характер изменения микрогеометрии поверхности контртела и его износ. Испытания медно-цинкового покрытия типа латуни в среде индустриального масла в паре со сталью ШХ15 показали низкую интенсивность изнашивания вплоть до эффекта безызносности без ухудшения качества поверхности пары трения.

Ключевые слова: покрытие меди; покрытие меди и цинка; латунь; фазовый анализ, газодинамическое напыление; механизмы изнашивания

Цитирование: *Москвитин Г. В., Архипов В. Е., Пугачев М. С.* Получение безызносных покрытий на основе меди и цинка газодинамическим методом // Проблемы механики. – 2026. – № 1(35). – С. 20-29.

1 Введение

Выбор материалов триботехнического назначения для тяжелонагруженных сопряжений определяется наличием комплекса определённых свойств, способных обеспечить работоспособность и долговечность изделия с учётом функциональных характеристик, особенно применительно к условиям эксплуатации. К таким характеристикам в первую очередь относится износостойкость и способность поверхностных эксплуатационных слоев сопротивляться разрушению под воздействием нагрузок и агрессивных сред.

Для изготовления деталей пар трения скольжения используются разнообразные конструкционные материалы [1]. Для стальных тяжелонагруженных сопряжений эффективным средством повышения их несущей способности является создание модифицированных поверхностных слоев. С этой целью применяются разнообразные методы, основанные на принципах химического, электрохимического и физического осаждения и формирования покрытий на поверхности изделий [2]. В качестве материалов покрытий широкое распространение получили медные сплавы вследствие их способности создавать предпосылки для реализации положительного градиента механических свойств по толщине поверхностного эксплуатационного слоя и, следовательно, локализовать в нем физико-химические и деформационные процессы, ответственные за формирование частиц износа [3]. При этом в основе триботехнической эффективности медьсодержащих поверхностных слоев является фрикционный массоперенос, который определяется их структурно-механическим состоянием.

*Работа выполнена в рамках ГНТП по проекту прикладных исследований, грант № А-5-001.

Массоперенос материала с одной поверхности на другую является универсальным эффектом и имеет место практически при всех механизмах изнашивания, являясь одним из важных составляющих, которые влияют на уровень поверхностного разрушения, несущую способность контакта и ресурс узла трения в целом. На основе результатов экспериментальных исследований в [4] описаны представления о наиболее распространенных механизмах фрикционного массопереноса. Наибольший эффект повышения износостойкости материала наблюдается при фрикционном массопереносе в условиях избирательного переноса [3]. Суть механизма состоит в формировании в зоне контакта слоя меди в результате физико-химических факторов при трении в поверхностно-активной смазочной среде и его последовательного переноса на сопряженную поверхность и обратно. Этот процесс имеет циклический характер, вызванный перераспределением дислокационной структуры и легирующих элементов, в результате чего пара трения переходит в режим практической безызносности.

В настоящее время для увеличения ресурса стальных пар трения получает применение метод «холодного» газодинамического напыления покрытия меди и медно-цинковых покрытий типа «латуни» [5, 6]. Этот метод позволяет напылять функциональные покрытия на небольшие участки и значительные площади поверхности деталей в заводских и полевых условиях при минимальном разогреве подложки до 150°C. Метод реализуется путем введения в нагретый поток воздуха, механической смеси частиц металлов и химического соединения – твёрдого и хрупкого оксида алюминия (корунда), при соударении с которым и поверхностью металлы деформируются, уплотняются и за счёт этого повышается когезия нанесённого слоя металла и адгезия с подложкой. Свойства покрытий существенно зависят от механических свойств металлов и температуры напыления и, например, для покрытия меди адгезия достигает $50 - 55$ и когезионная прочность находится в пределах $80 - 140$, что обусловлено наличием сжимающих напряжений разной величины [5]. Столь высокие значения позволяют рассчитывать на сопротивление разрушению нанесённого слоя металла под воздействием нормальных и касательных нагрузок.

Напыление покрытия с использованием механической смеси частиц меди, цинка и корунда сопровождается процессом модификации частиц цинка за счёт диффузии в них атомов меди с формированием структур, присущих латуням от твёрдого раствора цинка в меди (α-фазы) до твёрдого раствора меди в цинке (η-фазы), что дало основание обозначить медно-цинковые покрытия, как покрытия типа «латуни» [6]. Наличие корунда в покрытиях, нанесённых методом «холодного» газодинамического напыления, как бы заранее предопределяет невозможность их использования для подшипников трения скольжения из-за износа сопряжённой поверхности – контртела или пары в целом. Однако, проведённые и проводимые испытания на трение в разных средах, показывают результаты, которые дают основание считать покрытия на основе меди и медно-цинковые покрытия типа «латуни» весьма перспективными для создания поверхностей трения скольжения (подшипников) как при изготовлении деталей и узлов, так и при их восстановлении.

Испытание покрытий меди, нанесённых при температуре 270°C и 450°C в сопряжении с контртелом из стали ШХ15, термически обработанной на $60 - 62$ HRC в условиях смазки минеральным маслом И-20А и пластичном смазочном материале Литол-24, выявили низкую интенсивность изнашивания, соизмеримую с её показателями при трении в режиме избирательного переноса, когда потери на износ предельно малы [5]. Покрытие меди, нанесённое методом газодинамического напыления при использовании низкой и высокой температуры потока воздуха, обладает высокой

работоспособностью при испытаниях в условиях трения и изнашивания: I_h (покрытия) $\approx (1,1-1,5)\times10^{-10}$ и I_h (контртела) $\approx (0,3-0,4)\times10^{-11}$ при смазке маслом И-20А и I_h (покрытия) $\approx (2-5)\times10^{-10}$ и I_h (контртела) $\approx 0,2\times10^{-11}$ в Литол-24 [5]. Исследование микрогеометрии покрытия меди, нанесённого при температуре 450℃, и контртела по параметрам R_a и R_z показывает улучшение качества на 1 класс поверхностей трения для обеих сред испытания (табл.1),

Таблица 1 Результаты измерения микрогеометрии поверхности покрытия меди, нанесённого при 450С и контртела из стали ШХ15

Рабочая среда	Шероховатость, мкм					
	До испытания		Класс чистоты, ∇	После испытания		Класс чистоты, ∇
	R_a	R_z		R_a	R_z	
Контртело из стали ШХ15						
Масло И-20А	0,135	0,785	10–11	0,057	0,396	11–12
Литол 24	0,135	0,847	10–11	0,084	0,510	11
Образец с покрытием меди						
Масло И-20А	0,292	0,855	9	0,15	2,189	10
Литол 24	0,073	0,833	11	0,116	1,298	10–11

У покрытия, нанесённого при температуре 270℃ только при испытании в масле И-20А не отмечено улучшения качества, что может быть обусловлено изменением свойств покрытия, например твёрдости [5].

Цель исследования: проведение оценки состояния, состава и строения структуры покрытия меди и медно-цинкового покрытия типа «латуни», а также описание механизма влияния особенностей формирования покрытий на взаимодействие пар трения скольжения и массоперенос компонентов покрытия.

Режимы нанесения покрытия и методы исследования.

На образец из стали 40Х наносится покрытие с помощью установки ДИМЕТ–405 при скорости перемещения сопла относительно образца 10/ и расстояния от сопла до поверхности напыления 10 мм. Применяли механическую смесь частиц меди и корунда в соотношении $Cu : Al_2O_3 = 55 : 45$ (масс%), цинка и корунда в соотношении $Zn : Al_2O_3 = 55 : 45$ (масс%) и меди, цинка и корунда в соотношении $Cu : Zn : Al_2O_3 = 35 : 35 : 30$ (масс%) при этом температура потока воздуха составляла 270°, 360°, 450° [7].

Перемещение сопла вдоль края образца позволяет получить слой металла шириной ≈5,5 мм, имеющего в сечении вид сегмента окружности. Сопло выводится за периметр поверхности образца и затем смещается на расстояние $L = 2$ (перекрытие ≈64%) относительно ранее нанесённого слоя металла, после чего при обратном ходе сопла наносится следующий слой (рис.1) [6]. Толщина покрытия зависит от физико-механических свойств наносимого металла и температуры напыления и находится в пределах 150-450 мкм и для получения достаточной для проведения исследований и испытаний толщины покрытия (⩾1мм) напыление проводится многократно за счёт нанесения слоев друг на друга (циклов напыления) (рис. 1).

Фазовый состав покрытий исследовали на дифрактометре Rigaku Ultima IV на C_u - K_α излучении. Анализ дифрактограмм осуществляется на основе программного продукта PDXL (Rigaku) с использованием базы данных PDF-2. Количественный

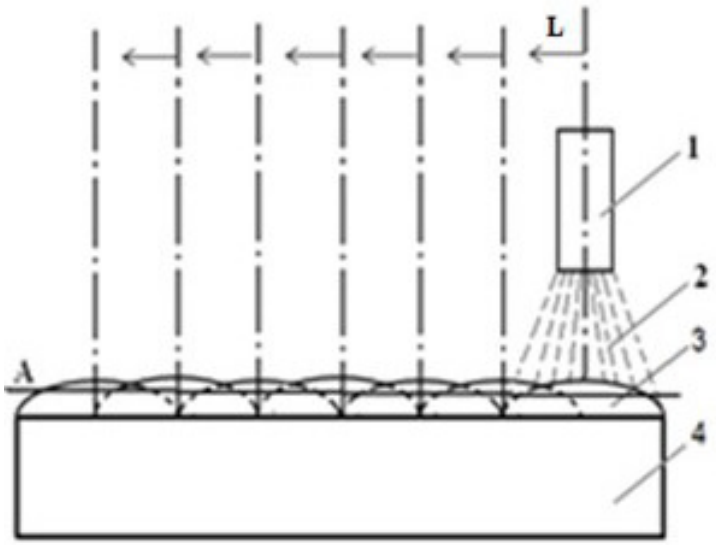


Рис. 1 Принципиальная схема нанесения покрытия: **Вид сбоку: 1- сопло; 2 – поток частиц; 3 – нанесенный слой; 4 – подложка; А – уровень механической обработки нанесённого слоя металла**

анализ проводится с использованием метода Ритвельда, реализованного в пакете программ PDXL (Rigaku).

Рентгенофлуоресцентный анализ осуществляется на спектрометре Rigaku PrimusII с использованием в качестве источника рентгеновского излучения рентгеновской трубки с Rh-анодом, в вакууме и диапазоне элементов от Ca до U. Количественный анализ проводится после записи и расшифровки экспериментальных спектров от исследуемых образцов с помощью специального программного обеспечения фирмы Rigaku ZSX методом фундаментальных параметров SQX (без использования эталонных образцов).

Изучение морфологии и элементного состава покрытия проводится на сканирующем электронном микроскопе FEI «Quanta-650» с энергодисперсионным рентгеноспектральным анализатором EDAX. В исследовании используется детектор обратноотраженных электронов, позволяющий получать изображение с контрастом по атомному номеру и визуализировать различные фазы на поверхности образцов. Источником электронов в микроскопе служил вольфрамовый катод, ускоряющее напряжение составляет 25 кВ.

2 Постановка задачи

С помощью методов рентгеноструктурного анализа определить состояние, состав и строение структуры покрытия меди и медно-цинкового покрытия типа «латуни». Дать описание влияния механизма формирования покрытий на взаимодействие пар трения скольжения и массоперенос компонентов покрытия.

3 Результаты

Рентгеноструктурный фазовый анализ покрытий на основе механической смеси частиц меди, цинка, а также этих металлов и корунда, нанесённых при 360°, показывает, что основной фазой в покрытии меди является чистая медь, то есть содержание оксида алюминия не превышает 1% [6, 8]. У покрытия цинка и медно-цинкового покрытия содержание — массовая доля корунда практически не отличается и составляет $5,6 \pm 0,7\%$ и $5,3 \pm 1,4\%$ соответственно.

Таким образом, выявлено, что данное напыление может оказывать значительное влияние на триботехнические характеристики медно-цинковых покрытий по сравнению с покрытиями меди и интенсивность изнашивания сопряжённых поверхностей пары трения.

Более того, можно предположить, что цинк, который при нормальной температуре имеет низкие механические свойства ($\delta \approx 30\%$, $\sigma_в = 120\,МПа$), не сможет «удержать» частицы корунда под воздействием сопряжённой поверхности, и они, отделившись от поверхности покрытия, могут оказать значительное влияние на целостность сопряжённой поверхности и пары в целом [9].

Рентгеноструктурный фазовый анализ также выявляет в медно-цинковом покрытии твёрдые растворы электронного типа на базе $CuZn_3$ (ε-фаза) с массовой долей до 12,6% и на базе Cu_5Zn_8 (γ-фаза) с массовой долей 17,0%, присущие латуням, что связано с диффузией меди в цинк и её модификацией [6, 10].

Поверхность покрытия, нанесённого на основе смеси частиц меди и корунда при температуре 360℃, после механической обработки на наждачной бумаге разной зернистости и полировке на сукне с использованием суспензий: визуально покрытие имеет достаточно монолитный характер с рельефом, возникшим за счёт устранения хрупких оксидных плёнок по границам частиц металлов. Наблюдаемые замкнутые полости (углубления) разной формы и протяжённости могут сформироваться в процессе напыления, так как открытая пористость покрытия составляет от 4% до 6% в зависимости от температуры напыления, но, в основном, их возникновение связано с устранением частичек корунда при механической обработке покрытия [5]. Они значительно отличаются по размеру, но в основном их величина не превышает 2 мкм, и они функционально могут осуществлять роль ёмкостей-карманов для удержания смазочных сред. На поверхности можно наблюдать частицы корунда разной формы и незначительного размера, которые, можно предположить, основным объёмом закреплены в медной основе, а также тонкие фрагменты кристаллов оксида алюминия, размер которых не превышает 5 мкм.

На поверхности покрытия меди и цинка был проведён микрорентгеноспектральный анализ химического состава в точках, которые визуально не содержат частиц корунда, а также каких-либо дефектов. Результаты представлены в виде весового содержания и интенсивности линий спектра алюминия (оксида алюминия) в покрытиях меди и цинка (табл. 2).

Зона инициирования спектра для данного состава покрытия представляет собой окружность диаметром $\approx$ 2 мкм при глубине возбуждения, не превышающей 1-2 мкм. Таким образом, представленные результаты микрорентгеноспектрального анализа состава покрытия и содержание компонентов покрытия с интенсивностью линий имеют интегральную величину (табл. 2). Из результатов анализа состава покрытия на основе меди видно, что содержание алюминия (Al2O3) отличается достаточно значительно по местам инициирования спектра от 1,87 вес% (интенсивность 63,64, т.4, табл. 2) до 0,09 вес% (интенсивность 3,01, т.1, табл. 2). Результаты можно интерпретировать как спектр от нескольких частиц, возможно разного размера присутствующих в зоне инициирования, так и от одной частицы. Однако, рассматривая ряд интенсивностей (т.т.1,2,3,6,8,9), которые могли быть получены от частиц примерно одного размера с учётом их закрепления основным объёмом - размером в медной основе, можно предположить, что при возбуждении остальных спектров таких частиц на площади инициирования спектра было больше, а именно в т.т.5 и 7 – 3-4 частицы и в т.4 – 10-12 частиц. Таким образом, можно сделать вывод, что распределение частиц

Таблица 2 Результаты микрорентгеноспектрального анализа покрытия на основе меди и цинка

Содержание алюминия, % в покрытии			
меди		цинка	
Весовое	Полная интенсивность	Весовое	Полная интенсивность
0,09	3,01	14,12	520,78
0,17	5,58	3,49	96,64
0,19	6,21	1,08	29,05
1,87	63,74	8,87	299,50
0,49	15,94	8,75	219,00
0,16	5,31	1,26	33,41
0,54	18,13	0,64	33,41
0,23	7,54	0,77	22,09
0,17	5,55	-	-

корунда по площади покрытия меди достаточно неравномерно, что может оказать влияние на работу сопряжённой пары трения.

Если соотнести площадь, занимаемую медью и алюминием к величине весовой компоненты каждого компонента и, соответственно, интенсивностью линий спектра, то можно оценить величину (размер) площади, занимаемой частицами корунда. Рассчитывая пропорциональную зависимость интенсивности спектра металлов от площади поверхности, занимаемой медью и алюминием получаем, что величина (площадь) частицы корунда не может превышать $0,05^2$. Как видно из результатов проведённого анализа, частицы корунда размещены в покрытии неравномерно, закреплены достаточно надёжно в покрытии меди, а иначе были бы удалены при механической обработке и должны незначительно выступать над поверхностью за счёт удаления более мягкой основы металла. Таким образом, покрытие представляет собой шлифовально – полировальный инструмент, который при приложении нагрузки и движении пары трения «выглаживает» микронеровности поверхности контртела из стали ШХ15, что сопровождается значительным улучшением качества поверхности, что было отмечено ранее (табл.1).

При взаимодействии сопряжённой пары трения, а именно покрытия меди с контртелом из стали ШХ15 термически обработанной на твёрдость $60-62$ HRC в предварительный контакт вступают две псевдоповерхности – одну из них составляют частицы корунда выступающие над поверхностью покрытия, а вторую – вершины профиля микронеровностей (R_a и R_t). По твёрдости оксид алюминия уступает только алмазу и, поэтому при нагружении пары и смещении поверхностей относительно друг друга частицы корунда врезаются в вершины микронеровностей на глубину выступающих частиц корунда, что значительно меньше параметров R_a и R_t, таким образом, улучшая качество поверхности. Остальная и, возможно весьма значительная часть вершин микронеровностей, не подвергшихся механическому воздействию частиц корунда, как инструмент врезается в поверхность покрытия меди и срезает слой металла, который остаётся на поверхности контртела, повышая его массу. При этом, за счёт съёма части поверхности металла покрытия увеличивается размер выступающей над поверхностью части частиц корунда с уширением их у основания.

В последующем, при взаимодействии сопряжённой пары, более значительно выступающие частицы корунда, оказывают существенное влияние на формирование

профиля поверхности контртела, что может сопровождаться обратным переносом на покрытие не только микрообъёмов меди, ранее «захваченных», но и некоторых частей стальных фрагментов микронеровностей контртела, тем самым изменяя массу образца с покрытием. Результат этого процесса ещё в большей степени позволяет сформировавшемуся микрорельефу поверхности контртела механически воздействовать на покрытие меди и «захватывать» - переносить более значительную массу меди, что уже может позволить сформироваться тонкой плёнки металла, возможно не на всей поверхности контртела, достаточно надёжно закреплённой в углублениях микрорельефа поверхности (R_a и R_t). Следует отметить, что при механическом воздействии частиц корунда на термически обработанную поверхность контртела и её «разрушении» от воздействия частиц корунда энергия будет увеличиваться, что будет способствовать созданию более прочных связей частичек - микрообъёмов меди с поверхностью контртела. Этим, в принципе, заканчивается процесс приработки поверхностей пары трения и в дальнейшем сформировавшаяся плёнка покрытия меди на контртеле, будучи поверхностью – псевдоповерхностью контртела с остатками выступающего микрорельефа вступает в контакт с частицами корунда, которые её деформируют-«вспучивают», создавая некую новую псевдоповерхность, вступающую в контакт с покрытием, что может способствовать переносу уже незначительных микрообъёмов меди на поверхность покрытия и затем обратно. Данный механизм рассмотрен и представлен как некий последовательный процесс, однако из-за того, что частицы корунда распределены по площади покрытия неравномерно, и они могут выступать над поверхностью на разную высоту, то перенос массы металлов должен носить последовательно - параллельный характер и его функционирование, может быть, не связано с наличием какой-либо смазочной среды.

4 Анализ результатов

Влияние количества частиц и их размеров на качество сопряжённой поверхности, то необходимо рассмотреть два механизма, которые могут оказать влияние на характер изменения микрогеометрии поверхности контртела и его износ. В медно-цинковом покрытии, в отличие от покрытия меди, визуально можно отметить достаточно многочисленные частицы корунда разной формы и размера. Причём, между этими частицами и матрицей – основой имеется некоторый разрыв - зазор, что можно интерпретировать как не слишком надёжное их закрепление в покрытии. В покрытии частицы цинка и меди размещены хаотично и, в той или иной степени могут чередоваться по отношению к направлению перемещения сопряжённых поверхностей и если частицы корунда. размещённые в частицах цинка с размером занимаемой площади до $0,5^2$, могут искажать профиль поверхности, ухудшая качество, то частицы корунда меньшего размера $0,05^2$ закреплённые надёжно в частицах меди могут и будут залечивать дефекты, не давая снижаться качеству, что и наблюдается при проведении испытаний медно-цинкового покрытия на трение [11]. Кроме того, при рассмотрении работы пары трения следует учитывать, что содержание цинка и меди зависит от температуры и продолжительности напыления (количества циклов), что связано с энергетическими особенностями метода газодинамического напыления и, например при температуре напыления 270°C массовая доля цинка может составлять порядка 10% [12, 13]. И, в этом случае, за счёт повышения содержания количества частиц меди с мелкими частицами корунда $(0,05^2)$ способных эффективно «залечивать» дефекты, нанесённые крупными частицами корунда, находящимися в частицах цинка, можно даже рассчитывать на повышение качества поверхности контртела и

пары в целом, как это было выявлено при испытании покрытия меди в паре со статью ШХ15 (табл.1).

При отрыве от поверхности покрытия крупных частиц корунда размером до 10 мкм и оценки возможности их воздействии на поверхность пары трения можно рассмотреть следующий механизм. При нанесении покрытия с использованием механической смеси частиц меди, цинка и корунда методом газодинамического напыления проходит модификация частиц цинка за счёт диффузии меди, в результате чего формируются фазы присущие латуни. Модификация структуры цинка зависит от параметров напыления (температуры, продолжительности) и состояния структуры, включая величину микродеформаций и, соответственно скорости диффузии [6, 13]. Оторвавшаяся от поверхности напыленного слоя металла частица корунда, перемещаясь по поверхности медно-цинкового покрытия, может встреться с частицей меди, чистого и модифицированного цинка деформируя и/или разрушая её, в зависимости от механических свойств металлов. Предел прочности меди, в нашем случае, составляет $210 - 220$ при пластичности 38%, а цинка 120 МПа при пластичности 22% и можно допустить, что они не способны остановить перемещение твёрдой частицы [14]. Но, встречаясь с модифицированной частицей цинка, которая имеет переменный состав и свойства, частица оксида алюминия может вполне остановиться. При входе на модифицированную частицу цинка частица корунда начнёт испытывать увеличение сопротивления перемещению, так как прочность её меняется в зависимости от содержания компонентов (меди, цинка) и может возрасти до 300 МПа, что соответствует латуни марки 90˘80. При смещении частицы оксида далее к центру модифицированной частицы цинка с увеличением содержания цинка и уменьшением содержания меди предел прочности возрастает до $400 - 450$, как для латуней марки $63 - 59$ [10]. Эта зона незначительна по величине – толщине и может существенно затормозить частицу корунда, но не остановить и тогда, преодолев это незначительное по величине препятствие, частица корунда попадает в область с содержанием меди $8 - 10$ вес%, прочность которой составляет $20 - 30$ и разрушает её, тем самым, как-бы попадая в карман. Так как далее за этой областью опять возникает участок частицы модифицированного медью цинка прочностью $400 - 450$, то эта частица не будет иметь возможность перемещаться далее и разрушать целостность поверхности пары трения.

5 Обсуждение

Исследуемый способ получения медно-цинковых покрытий путем подбора оптимальных технологических параметров напыления сформировать покрытие с высокими трибологическими, коррозионными или механическими свойствами, что подтверждается проведенными исследованиями и демонстрирует, метод «холодного» газодинамического напыления, как современный перспективный способ формирования функциональных покрытий различного назначения на поверхности сплавов железо-углерод.

6 Заключение

В результате рентгеноструктурным фазовым анализом определено, что при напылении покрытия на основе механической смеси частиц меди и цинка методом холодного газодинамического напыления цинк является основным элементов «захватывающим» частицы корунда.

Цинк в покрытии типа «латуни», не сможет «удержать» частицы корунда под воздействием сопряжённой поверхности, что приводит к их отделению, отделившись

от поверхности покрытия, они оказывают значительное влияние на целостность сопряжённой поверхности и пары трения в целом.

На поверхности напыленного покрытия типа «латуни» существуют замкнутые полости (углубления) разной формы и протяжённости формируются в процессе напыления, их возникновение связано с устранением частичек корунда при механической обработке покрытия. Их величина не превышает 2 мкм, и они функционально могут осуществлять роль ёмкостей-карманов для удержания смазочных сред.

Распределение частиц корунда по площади покрытия меди достаточно неравномерно, что может оказать влияние на работу сопряжённой пары трения.

Предложены два механизма, которые могут оказать влияние на характер изменения микрогеометрии поверхности контртела и его износ.

Медно-цинковое покрытие типа «латуни» в среде индустриального масла в паре со сталью ШХ15 показывает низкую интенсивность изнашивания вплоть до эффекта безызносности без ухудшения качества поверхности пары трения.

7 Благодарности

Авторы благодарят д.т.н. профессора Л.И. Куксёнову за проведение испытаний медных и медно-цинковых покрытий, обсуждение и интерпретацию результатов.

Литература

[1] *Арзамасова Б. Н.* Конструкционные материалы. Справочник / М.: Машиностроение, 1990. 688 с.

[2] *Елагина О. Ю.* Методы создания износостойких покрытий / М.: НЕДРА, 2010. 570 с.

[3] *Kuksenova L. I., Savenko V. I.* Physicochemical Tribomechanics of Antifriction Materials Operating in Heavy-Loaded Friction Pairs in Active Lubricating Media // Friction and Wear, 2023. V. 44. №6. P. 333–345. doi: http://dx.doi.org/10.32864/0202-4977-2023-44-6-504-520.

[4] *Погосян А. К., Оганесян К. В.* Явление фрикционного переноса: основные закономерности и методы исследования // Трение и износ, 1986. Т. 7. №6. С. 998–1008.

[5] *Архипов В. Е., Лондарский А. Ф., Москвитин Г. В., Пугачев М. С.* Газодинамическое напыление: структура и свойства покрытий / М.: КРАСАНД, 2017. 240 с.

[6] *Архипов В. Е., Муравьёва Т. И., Пугачев М. С., Шкалей И. В.* Влияние технологических параметров газодинамического напыления на структурно — фазовые превращения в покрытии типа «латуни» // Упрочняющие технология и покрытия, 2020. №12. С. 554–560.

[7] Димет. Применение технологии и оборудования. URL: https://www.dimet-r.narod.ru/.

[8] *Миркин Л. И.* Рентгеноструктурный анализ. Индицирование рентгенограмм. Справочное руководство / М.: Наука, 1981. 496 с.

[9] *Гуляев А. П.* Металловедение / М.: Металлургия, 1986. 566 с.

[10] *Ефремов Б. Н.* Латуни. От фазового строения к структуре и свойствам / М.: ИНФРА-М, 2020. 314 с.

[11] *Сачек Б. Я., Мезрин А. М., Архипов В. Е., Лондарский А. Ф.* Модифицирование поверхностей трибосопряжений напылением металлических покрытий как средство повышения их фреттингостойкости // Трение и износ, 2018. Т. 39. №4. С. 24–29.

[12] *Куксёнова Л. И., Архипов В. Е., Пугачев М. С., Козлов Д. А.* Структурно-фазовые превращения, массоперенос и триботехнические характеристики газодинамических медно-

цинковых покрытий при трении скольжения // Материаловедение в машиностроении, 2025. №2. С. 11–22.

[13] *Бокштейн Б. С.* Диффузия в металлах. Изд 2-е / М.: URSS, 2019. 248 с.

[14] *Колачев Б. А.* Металловедение и термическая обработка цветных металлов и сплавов / М.: МИСИС, 2005. 432 с.

UDC 621.793.7

PRODUCTION OF NON-CORROSIVE COATINGS BASED ON COPPER AND ZINC BY GASDYNAMIC METHOD*

[1]***Moskvitin G. V.,*** [1]***Arkhipov V. E.,*** [1]***Pugachev M. S.***

GVMoskvitin@yandex.ru

[1]Federal State Budgetary Institution of Science Blagonravov Institute of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences (IMASH RAS), Moscow, Russia

The paper examines copper and copper-zinc coatings (such as "brass") obtained by the method of "cold"gas-dynamic spraying. The X-ray diffraction phase analysis method revealed that zinc is the main element that "captures"corundum particles, but it cannot "retain"corundum particles under the influence of a conjugated surface, having separated from the coating surface, they have a significant effect on friction processes in the tribological pair. Two mechanisms are proposed that describe the effect on the nature of the change in the microgeometry of the surface of the counter body and its wear. Tests of copper zinc coating of brass type in the medium of industrial oil paired with steel ShKh15 showed low wear intensity up to the effect of non-wear without deterioration of the surface quality of the friction pair.

Keywords: copper coating; copper and zinc coating; brass; phase analysis, gas dynamic spraying; wear mechanisms

Citation: Moskvitin G. V., Arkhipov V. E., Pugachev M. S. 2026. Production of Non-Corrosive Coatings Based on Copper and Zinc by Gasdynamic Method. *Problems of mechanics.* 1(35): 20-29.

*The research was supported by Agency for Science and Technology of the Republic of Uzbekistan (grant A-5-001).

УДК 528.854+539.3

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ СМЕЩЕНИЙ ГРЕБНЕЙ ПЛОТИН В УЗБЕКИСТАНЕ*

[1]*Султанов К. С.*, [2]*Быковцев А. С.*, [1]*Ан Е. В.*
sultanov.karim@mail.ru; bykovtsev1@yahoo.com; ekaterinaan1986@gmail.com
[1]Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан;
[2]Региональная академия естественных наук, Порт Вайними, Калифорния, США

Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз проводит анализ данных космического мониторинга смещений 29 узбекских плотин, полученных с использованием спутников StriX. Для обработки используется информация SAR, поступающая от компании Synspective и размещаемая на специализированной электронной платформе. Спутники StriX используют радар с синтезированной апертурой (SAR) для наблюдения и анализа смещений, зарегистрированных на поверхностях гребней и берм плотин.

Информация на платформе содержит данные о горизонтальных (запад-восток) и вертикальных (вверх-вниз перпендикулярно к поверхности гребня) смещениях фиксированных точек плотины. Эти данные не учитывают азимут, т.е. угол между осью гребня плотины и направлением на север. Институт разработал методы использования данных с платформы для сопоставления их с теоретическими расчетами устойчивости и смещений гребня плотины.

В настоящее время мы провели исследования устойчивости плотин с использованием программного обеспечения Plaxis и Geostudio и проанализировали чувствительность методики, разработанной компанией Synspective, к количественной оценке горизонтальных смещений в направлениях север-юг и восток-запад для различных ориентаций гребней плотин. Полученные расчетные смещения и деформации нескольких плотин были сопоставлены с данными дистанционного космического мониторинга, зарегистрированными компанией Synspective.

Анализ показал, что методика Synspective частично удовлетворительна для плотин с гребнями, ориентированными в направлении «север-юг» с азимутальными колебаниями ±30°, не очень удовлетворительна для плотин с азимутальными колебаниями гребня от ±30 до ±60° и практически неприменима для азимутальных колебаний гребня от ±60 до ±90°. Для плотин с ориентацией гребня в направлении «запад-восток» с азимутальными отклонениями в пределах $\pm 30^{\text{o}}$ все данные, предоставляемые на платформе, разработанной Synspective, имеют существенные ограничения, и эта методика неприменима для отслеживания движений плотин с ориентацией гребня в направлении «запад-восток» с азимутальными колебаниями ±30°.

В результате анализа было установлено, что примерно 40 процентов из 29 плотин, включенных в анализ, имеют гребни, ориентированные в направлении «запад-восток». Таким образом, данные, предоставленные компанией Synspective (Сингапур), недостаточны и требуют уточнения, которое должно включать использование

*Работа выполнена в рамках гранта «Модернизация инфраструктуры для устойчивого развития Института механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева (ИМССС)» (Грантовое соглашение № PRIM 01-13 от 2 декабря 2024 г.), финансируемого в рамках проекта MUNIS, поддерживаемого Всемирным банком и Правительством Республики Узбекистан, а также при базовом бюджетном финансировании Института механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз.

дополнительной орбиты, ориентированной вдоль экватора. Для более точного сравнения наблюдаемых данных, полученных с помощью радиолокационной съемки с синтезированной апертурой (SAR), и сопоставления их с расчетными данными о смещениях точек, расположенных на гребнях и бермах плотин, полученными с помощью программного обеспечения Plaxis и Geostudio, необходимо разработать методику преобразования векторов смещения в трех системах координат, используемых в этих наблюдениях и расчетах.

Ключевые слова: космический мониторинг, перемещения, гребень плотины

Цитирование: *Султанов К. С., Быковцев А. С., Ан Е. В.* Анализ чувствительности дистанционного зондирования смещений гребней плотин в Узбекистане // Проблемы механики. – 2026. – № 1(35). – С. 31-44.

1 Введение

Важную роль на всех этапах мониторинга плотин играют наблюдения за смещениями на бермах и гребнях гидротехнических конструкций, так как они являются одними из основных показателей потенциальной устойчивости или нестабильности плотин. Долговечность и безопасность плотин зависит от их способности противостоять различного рода нагрузкам. Для насыпных плотин характерны две основные формы смещений: вертикальные осадки, вызванные массой самой плотины, и горизонтальные перемещения, возникающие под воздействием давления для различных уровней воды в водохранилищах. Смещения грунта на бермах и гребнях плотин можно измерять с помощью наблюдений на месте с использованием традиционных геодезических методов, таких как нивелирование и GPS, основанные на применении стационарных или встроенных датчиков. Однако пространственное разрешение этих методов обычно очень низкое и они часто требуют больших трудозатрат. В последнее десятилетие методы дистанционного зондирования из космоса, особенно интерферометрическая радиолокация с синтезированной апертурой (InSAR), показали свою эффективность в мониторинге устойчивости плотин. По сравнению с традиционными методами, технология InSAR не зависит от наземного оборудования и может быть реализована при относительно низких затратах. Более того, она позволяет получать более обширные пространственные поля смещений. Интерферометрическая радиолокация с синтезированной апертурой (InSAR) – это активный метод дистанционного зондирования, который стал одним из наиболее полезных геодезических методов для высокоточных измерений смещений плотин на больших площадях. А космический мониторинг с помощью спутниковых средств наблюдений обеспечивает высокоточное отслеживание изменений движения (осадки и смещения) на поверхности плотин через равные промежутки времени, что помогает отслеживать небольшие структурные движения плотины, чтобы предотвратить ее разрушение до того, как ущерб окажется катастрофическим и приведет к чрезвычайной ситуации. Таким образом, применение космических технологий для контроля состояния водохранилищ является актуальной задачей для многих регионов, в том числе и для Республики Узбекистан.

Важным достоинством космических снимков и цифровых данных является их повторяемость съемок, т.е. фиксация состояния объектов в разные моменты времени и возможность прослеживания их динамики. Мониторинг предполагает не только наблюдение за процессом или явлением, но также его оценку, прогноз распространения и развития, а кроме того разработку системы мер по предотвращению опасных последствий или поддержанию благоприятных тенденций.

Используя данные радиолокационной съемки Sentinel-1 для определения смещений до момента разрушения по вертикали и горизонтали в направлении восток-запад в период с 2017 по 2020 года в работах Xie и др. (2022) и Xiao и др. (2022) был дан анализ причин разрушения западной стены Сардобинского водохранилища в Узбекистане, произошедший 1 мая 2020 года. Оба коллектива исследователей с помощью InSAR выявили дифференциальную осадку порядка нескольких сантиметров в месте прорыва, что соответствует внутренней эрозии насыпи, и пришли к выводу, что технология InSAR способна распознавать предвестник разрушения, обнаруживая движение поверхности, и что сигналы смещений могут помочь предупредить о рисках и избежать повреждения плотины.

Как отмечено выше, методы InSAR очень эффективны при оценке смещений грунта. В связи с этим было рекомендовано включить мониторинг InSAR в будущие программы безопасности, чтобы обеспечить подробную информацию о смещениях и снизить риски прорыва эксплуатируемых плотин в Республике Узбекистан.

Агентство космических исследований и технологий проводит непрерывный радиолокационный мониторинг сейсмостойкости плотин водохранилищ, определяет динамику смещений и оседаний плотин водохранилищ и прилегающих территорий и вводит данные в «Электронную платформу для проведения сейсмологических наблюдений на водоемах» (далее Платформа). Система непрерывного радиолокационного космического мониторинга сейсмостойкости плотин водохранилищ установлена на 29 плотинах Узбекистана. Для анализа данных мониторинга нами были выбраны три высокие грунтовые плотины Чарвак, Тупаланг и Заамин с разной ориентацией гребня плотин.

2 Результаты интерферометрической обработки

Спутниковая система регулярно передает данные о смещениях плотин. Информация поступает в систему автоматизации обработки изображений, откуда попадает в специально разработанную базу данных (Платформу) Агентства космических исследований и технологий при Министерстве цифровых технологий республики Узбекистан. С Платформы можно получить показатели горизонтальных и вертикальных смещений на поверхности тела плотины. Кратко остановимся на данных космических радиолокационных изображений для трёх высоких грунтовых плотин Чарвак, Тупаланг и Заамин. Космический мониторинг для этих плотин водохранилищ реализовался на основе InSAR с 11 января 2019 года по 27 декабря 2025 года для плотины Чарвак, с 6 января 2020 года по 28 декабря 2025 года для плотины Тупаланг и с 5 января 2019 года по 28 декабря 2025 года для плотины Заамин.

В качестве примера рассмотрим изменения смещений по годам для точек, расположенных на гребне и бермах плотины Чарвак (рис. 1) за весь период наблюдений, и сопоставим их с информацией по уровню воды в водохранилище. Данные о смещениях с Платформы, предоставляют информацию о горизонтальных перемещениях только в двух направлениях Запад–Восток, при этом если точка движется на Запад, то знак «-», а если на Восток, то знак «+». Для вертикальных перемещений точек плотины принимается, что если точка оседает, то перемещения имеют знак «-», а если поднимается, то знак «+».

В левой части рис. 1 желтым цветом представлены точки, по которым имеются данные на Платформе. Для большей надежности мы выбирали четыре точки и получали среднее значение смещений по всем четырем точкам и присваивали его соответствующему квадрату. Квадраты 1-5 были выбраны на берме, а квадраты 6,

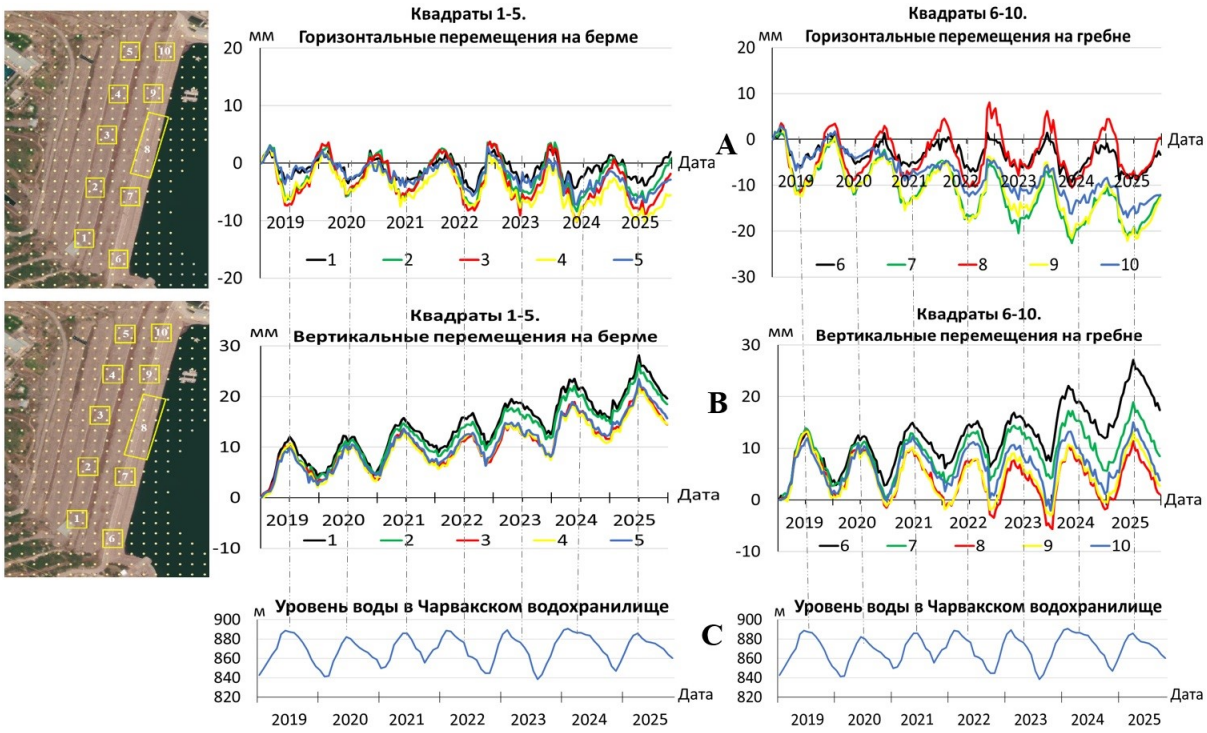


Рис. 1 Группы точек, расположенные на гребне и берме плотины Чарвак

7, 9 и 10 расположены на гребне плотины. Для средней части гребня плотины данные представлены по совокупности 10 точек, расположенных внутри прямоуголька 8. Для середины плотины красным цветом показаны средние значения горизонтальных и вертикальных перемещений по квадрату 3, расположенному на берме, и для прямоуголька 8, расположенного на гребне плотины.

Справа рис. 1 приведены графики средних линий, отражающие более корректно перемещения, выбранных групп точек в рассматриваемых квадратах 1 – 10. На рис.1,A и 1,B представлены средние графики смещений для горизонтальных и вертикальных перемещений на берме (1-5) и гребне (6-10) плотины, соответственно. На рис. 1,C изображен график изменения уровня воды в Чарвакском водохранилище за период с 2019 года по 2025 год (7 лет). Графики средних линий сгруппированы по их расположению: на берме или гребне плотины и представлены за семилетний период наблюдений (2019-2025 гг.), характеризующие направление и динамику изменения значений точек с течением времени.

Результаты InSAR обработки данных (графики смещений рис.1,A и 1,B) и сопоставление их с данными уровня воды в водоеме (рис.1,C) за наблюдаемый период показали, что вдоль всего гребня и бермы движение точек имеет сезонный характер, связанный с уровнем воды в водохранилище. Увеличение уровня воды происходит за счет накопления воды в водохранилище, что приходится на первое полугодие каждого года, а уменьшение уровня воды связано со сбрасыванием воды на полив полей, что приходится на второе полугодие каждого года.

С увеличением уровня воды горизонтальные смещения плотины увеличиваются и точки плотины смещаются в сторону запада, а вертикальные смещения плотины также увеличиваются и точки плотины поднимаются вверх. Максимальные значения горизонтальных перемещений приходятся ежегодно на середину года, а минимальные на конец года (рис.1).

С уменьшением уровня воды горизонтальные смещения плотины уменьшаются до нуля и некоторые точки плотины смещается в сторону востока, а вертикальные смещения плотины также уменьшаются и некоторые точки плотины начинают оседать. Максимальные значения вертикальных перемещений приходятся ежегодно на середину года, а минимальные на конец года и начало следующего года (рис. 1). Максимумы абсолютных значений как горизонтальных, так и вертикальных смещений, то есть пики подъема и спада, соответствуют весенне-осенним сезонам уровня и объема воды в водоеме.

Анализ горизонтальных смещений показал, что смещения по берме (квадраты 1-5) в 2 раза меньше, чем смещения по гребню (квадраты 6-10). Следует отметить, что горизонтальные перемещения на берме (квадраты 1-5) изменяют свое направление в течение года, а именно с увеличением уровня воды смещения ориентированы на запад, а при уменьшении уровня воды горизонтальные перемещения доходят до нуля и затем начинаются горизонтальные перемещения в восточном направление. На гребне плотины направления движения горизонтальных перемещений в квадратах 7, 9, 10 совпадают и движутся на запад. А горизонтальные перемещения в квадратах 6 (показаны черным цветом) и 8 (показаны красным цветом) отличаются от поведения точек в квадратах 7, 9, 10. При уменьшении уровня воды перемещения в квадрате 6 доходят до нуля, а перемещения в прямоугольнике 8 доходят до нуля и меняют свое направление на восточное при уменьшении уровня воды на плотине.

Четко выражена скорость накопления горизонтальных смещений на берме и гребне. Для смещений на берме (квадраты 1 – 5) скорость равна приблизительно 1 мм/год до 2021 года, а начиная с 2021 скорость увеличивается до 2.5 мм/год. Для смещений на гребне (квадраты 6 – 10) средняя скорость накопления горизонтальных смещений равна приблизительно 3 мм/год для квадратов 7 и 9, для квадрата 10 скорость приблизительна равна 2 мм/год, а для точек внутри квадрата 6 и прямоугольника 8 скорость приблизительно равна 1.5 мм/год.

Следует отметить, что горизонтальные смещения на гребне в средней части плотины, т.е. в пямоугольнике 8 являются наиболее чуствительными к уровню воды в резервуаре, а именно с увеличением уровня воды точки внутри пямоугольника 8 движутся на запад, а при уменьшении уровня воды доходят до нуля, а затем движутся на восток и являются максимальными среди остальных.

Анализ вертикальных смещений показал, что направление смещений на берме положительно, т.е. наблюдается подъём точек и он практически одинаков для точек, расположенных в квадратах 3, 4, и 5, со средней скоростью накопления смещений приблизительно 3мм/год. Значения смещений в квадратах 1 и 2 значитяльно выше и имеют скорость накопления смещений приблизительно 4мм/год.

Для вертикальных смещений на краях гребня (квадраты 6, 7 и 10) наблюдается подъем, а в середине гребня (квадраты 8 и 9) наблюдается осадка при уменьшении уровня воды в резервуаре. Максимальная осадка составляет 5мм, которое приходилось на конец 2023 года в средней части плотины.

Скорость накопления вертикальных смещений по гребню является максимальной для точек расположенных в квадрате 6 и достигает 4 мм/год, а наименьшая скорость наблюдалась в середине гребня и составляет приблизительно 1.5 мм/год (прямоугольник 8).

Максимальные значения скорости накопления вертикальных смещений отмечаются на берме в квадрате 1, а также на гребне в квадрате 6 и примерно составляют 4мм/год. Данные наблюдения позволяют сделать предположение, что наиболее

опасным местом является южная часть в теле Чарвакской плотины, где происходят ежегодные накопления вертикальных смещений со скоростью 4 мм/год в середине каждого года в связи с увеличением уровня воды в Чарвакском водохранилище.

Таким образом, система постоянного космического мониторинга позволяет контролировать значения смещений (горизонтальных и вертикальных) в плотине водохранилища, оценивать текущую ситуацию в зависимости от уровня воды в водохранилище.

3 Ограничения и недостатки

Следует также отметить ограничения и недостатки предоставляемых платформой данных с использованием методологии Synspective получения InSAR данных о дистанционном зондировании и измерений смещений плотин для анализа их устойчивости.

В качестве основного недостатка и ограничения следует отметить, что предосталяемые данные компанией Synspective не учитывают азимут (угол между осью сечения плотины и севером), т.е. угол на который повернута плотина относительно севера.

Для анализа данных по мониторингу плотин, имеющих различные углы ориентации гребня, нами были выбраны три высокие грунтовые плотины с разными азимутами ориентации гребней плотин: Чарвак, Тупаланг и Заамин (рис. 2).

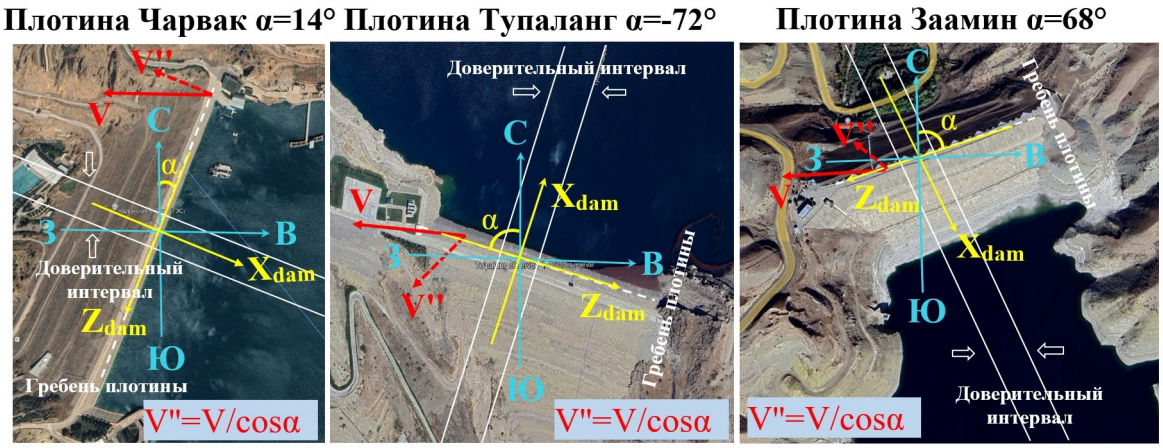


Рис. 2 Направление гребня плотины Чарвак на север-северо-восток или азимут 14°, направление гребня плотины Тупаланг на запад-северо-запад или азимут -72° или 288° и направление гребня плотины Заамин на север-северо-запад или азимут 68°

Так как все три плотины имеют различные азимуты ориентации гребней, то в качестве основополагающих действий необходимо модифицировать данные Synspective, размещенные на Платформе, для каждой плотины с целью адекватного использования этих переработанных данных для сравнения данных Synspective с теоретическими результатами по расчетам плотин на устойчивость и анализ смещений в теле плотин. Для этого выполняется следующая работа:

– вводятся глобальная Xo,Yo,Zo (WGS84) система координат с началом в Центре Земли и локальная региональная система координат E, N, U, позволяющая определить ориентацию плотины (север–юг – это вертикальная линия и запад – восток – это горизонтальная линия).

– вводится локальная система координат в выбранном сечении плотины. Ось Xdam совпадает с осью сечения плотины, а ось Ydam направляется перпендикулярно ей. Локальная система координат имеет правую ориентацию, поэтому ось Xdam направлено вправо, ось Ydam вверх, а ось Zdam направлена вдоль гребня плотины в южном направлении (рис. 3).

– определяется доверительный интервал, в рамках которого будут выбраны точки плотины.

– с помощью транспортира определяется азимут оси гребня плотины.

– точки, попавшие в доверительный интервал, корректируются на этот угол.

– сравниваются откорректированные значения горизонтальных смещений с полученными теоретическими результатами с использование программ Plaxis и Geostudio.

Таким образом получается 3 системы координат: глобальная, локальная и расчетная системы координат, которые приведены на рис. 3.

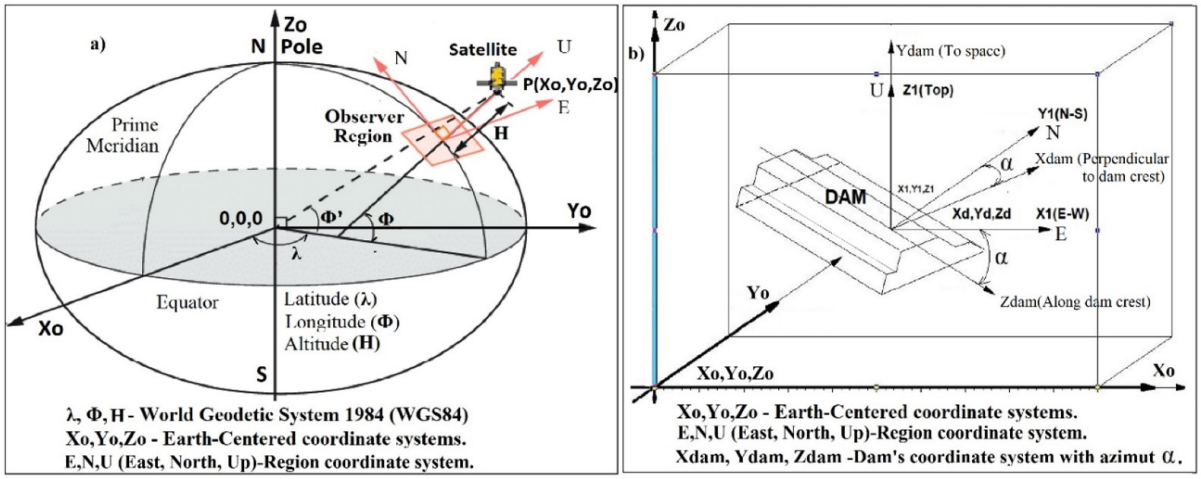


Рис. 3 Три системы координат: глобальная Xo,Yo,Zo (WGS84), локальная E, N, U и расчетная система координат плотины Xdam,Ydam, Zdam

4 Анализ устойчивости склона для плотин Чарвак, Тупаланг и Заамин

Для характеристики воздействия цикла колебаний уровня воды (т.е. внешних сил) на плотину мы использовали Моргенштерн-Прайс анализ, с предварительной оценкой расположения пьезометрические поверхности для количественной оценки устойчивости склона в зависимости от изменяющихся условий нагрузки воды. Все расчеты были выполнены с использованием обновленной версии программного обеспечения GeoStudio 2025.1.1, SEEP/W и SLOPE/W. Нагрузки, действующие на плотины водохранилищ, включают собственный вес, колебания уровня воды, фильтрационное давление и т.д. Смещение является реакцией на приложенные нагрузки и в основном обусловлена адаптацией материалов к распределению напряжений. Метод предельного равновесия применен для количественной оценки устойчивости склона путем разделения склона на небольшие участки и решения условия равновесия сил для получения движущей силы и силы сопротивления, действующих на критическую плоскость скольжения. Используя коэффициент запаса прочности (FS, отношение прочности на сдвиг к действующему касательному напряжению) в качестве индикатора, мы можем определить критические поверхности скольжения и изменения

устойчивости как верхнего, так и нижнего склонов. Некоторые результаты аналогичного анализа с более подробным описанием были представлены в публикациях Быковцева (2025).

Для разработки двумерной сопряженной модели, позволяющей оценить вклад двух физических процессов – прямого воздействия нагрузки воды (т.е. увеличения гидростатического давления) и последующей фильтрационной силы (т.е. рассеивания избыточного порового давления в переходном режиме) на плотину – был проведен анализ устойчивости плотин. Для этого использовались модули SLOPE/W и SEEP/W программного пакета GeoStudio.

4.1 Плотина Чарвак

Чарвакская плотина – одна из крупнейших гидротехнических сооружений в Центральной Азии. Она играет ключевую роль в водоснабжении, ирригации, выработке электроэнергии и регулировании водного режима в регионе. Географически Чарвакское водохранилище расположено к северо-востоку от столицы Узбекистана, в Ташкентской области Восточного Узбекистана, в Бостанлыкском районе. Оно находится в истоке реки Чирчик, немного ниже по течению от слияния рек Пскем и Чаткал, между отрогами Угамского и Чаткальского хребтов Западного Тянь-Шаня. Водохранилище образовано плотиной высотой 168 метров. Тип плотины – каменно-насыпная с глиняным ядром. Это массивная конструкция, построенная из камней и грунта, с водонепроницаемым ядром для предотвращения протечек. Основные данные по Чарвакской плотине для расчета устойчивости склонов были получены с электронной платформы для проведения сейсмологических наблюдений на водохранилищах: высота плотины составляет приблизительно 168 метров; длина по гребню – приблизительно 762 метра; ширина по гребню составляет 12 метров. Объем Чарвакского водохранилища при максимальной вместимости составляет приблизительно 2 кубических километра. Плотина была введена в эксплуатацию в 1975 году.

В непосредственной близости от плотины Чарвак находится ряд сейсмически активных разломов: Пскемский, Кумбель-Коканд-Хайдарканский и Каржантауский разломы. Плотина Чарвак расположена в сейсмически активной зоне с сейсмичностью 9 баллов по шкале сейсмического зонирования МСК-64. В этой зоне произошли сильные землетрясения магнитудой M>5: землетрясение в Бричмулле (1956), Ташкентские землетрясения (1966, 1980), Денапское землетрясение (1974) и Таваксайское землетрясение (1977).

На рисунке 4 показаны результаты расчетов устойчивости плотины Чарвак для трех различных уровней воды в водохранилище. При уровне воды 820 м коэффициент запаса прочности достигает значения FS=1.52, что выше допустимого коэффициента 1.5. При уровне воды 840 м коэффициент запаса прочности равен FS=1.5, то есть достигается критическое значение. При повышении уровня воды выше 840 м коэффициент запаса прочности будет уменьшаться, и при достижении максимального верхнего уровня воды 890 м коэффициент запаса прочности составит FS=1.46, что ниже допустимого коэффициента 1.5. Это указывает на то, что при достижении максимального уровня воды в водохранилище Чарвак часть склона может потерять свое глобальное устойчивое равновесие.

Следовательно, можно заключить, что для плотины Чарвак, имеющей каменно-насыпную структуру и глиняное ядро, а также тщательно подобранные фильтрующие материалы, понижение уровня воды в водохранилище ниже 840 м делает плотину Чарвак статически устойчивой; в то время как повышение уровня выше 840

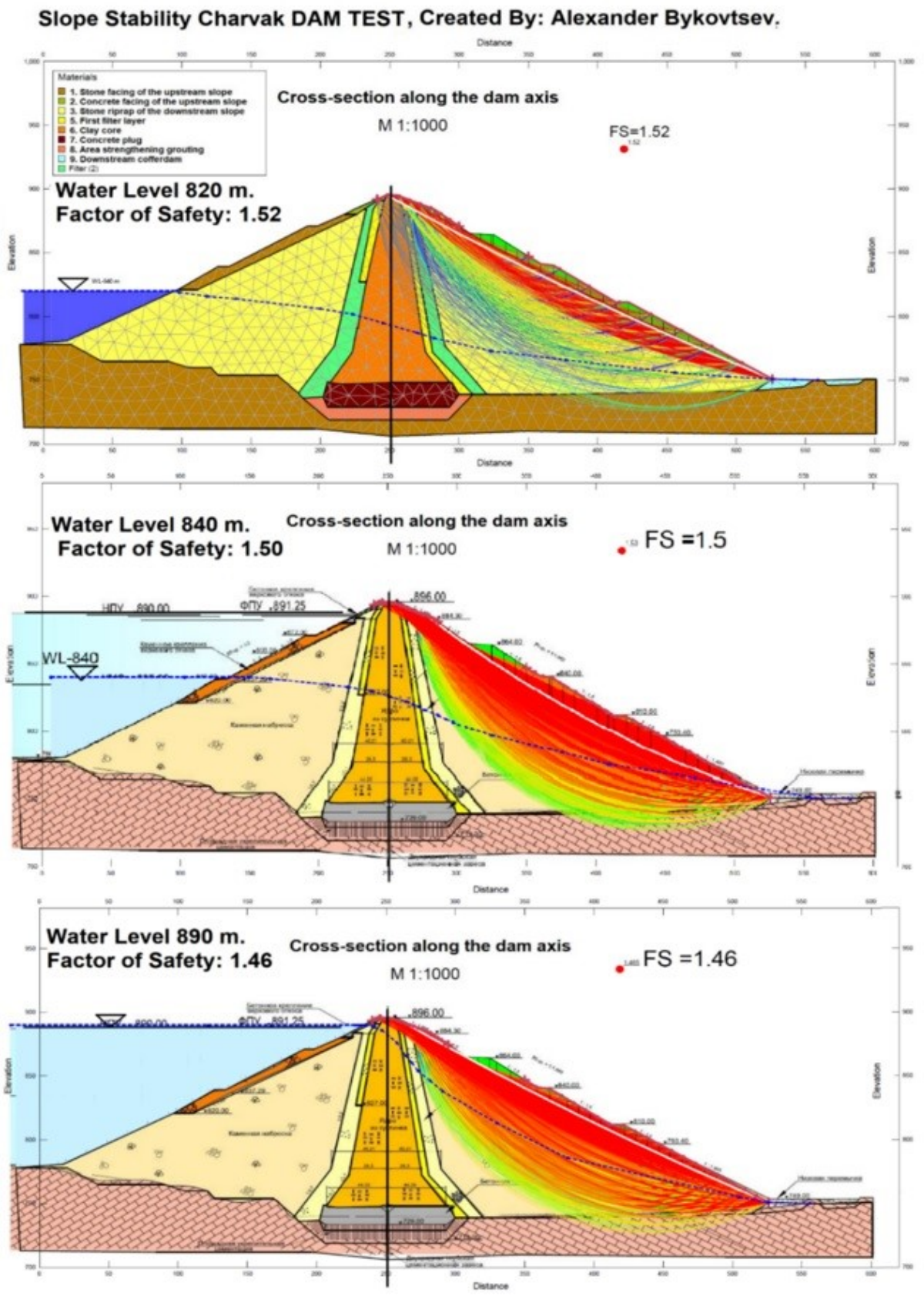


Рис. 4 Анализ устойчивости склонов плотины Чарвак при различных уровнях воды в водохранилище

м приводит к тому, что часть склона становится неустойчивой, и плотина может потерять свое общее устойчивое равновесие.

Дополнительно следует отметить, что ежегодное поднятие уровня воды до 890 м приводит к дополнительному росту скорости накопления горизонтальных и вертикальных смещений как в центре плотины квадрат 3 на берме и прямоугольник 8 на гребне плотины, так и в наиболее опасной южной части плотины, где скорости накопления смещений принимают максимальные значения в точках, представленных квадратами 1 и 6 на рисунке 1.

4.2 Плотина Тупаланг

Плотина Тупаланг была построена в 1980-х годах на реке Тупалангдарья, притоке реки Сурхандарья (бассейн Амударьи) в Сариясийском районе Сурхандарьинской области Узбекистана.

Высота плотины составляет 185 м (самая высокая плотина в Узбекистане), а длина по гребню – 410 м. Плотина представляет собой каменно-насыпную плотину с центральным ядром из суглинка и поддерживающими призмами из горной породы. Центральное ядро плотины вертикальное и симметричной формы. Между ядром и поддерживающими призмами предусмотрен двухслойный фильтр. Верхний склон укреплен щебнем крупноблочного камня слоем толщиной 10 м. Плотина Тупаланг расположена в сейсмически активной зоне с сейсмичностью 9 баллов. Плотина образует водохранилище Тупаланг площадью 8.85 км^2, общим объемом 500 миллионов м^3, пригодным для использования объемом 470 миллионов м^3 и нормальным уровнем воды 960 м.

На рисунке 5 показаны результаты расчетов устойчивости плотины Тупаланг для двух разных уровней воды в водохранилище: 890 м и 916 м, в условиях неполной фильтрации воды в боковой призме. Предполагалось, что в порах боковой призмы остается до 2 процентов воды. Расчеты устойчивости плотины Тупаланг показали, что при уровне воды 916 м коэффициент запаса прочности FS=1.75, тогда как при понижении уровня воды до 890 м коэффициент запаса прочности увеличивается на 8 процентов, с FS=1.75 до FS=1.90.

4.3 Плотина Заамин

Плотина Заамин расположена в Джизакской области, Зааминском районе, в 210 км от Ташкента. Водохранилище было построено на реке Заамин в период с 1975 по 1989 года и введено в эксплуатацию в 1983 году. Оно находится в сейсмически активной зоне с сейсмичностью 8 баллов. Основные данные по плотине Заамин для расчета устойчивости склонов: высота плотины около 74 метров; длина гребня 365 м; тип плотины: земляная плотина (уплотненный суглинок) с грунтовым ядром. Уровень воды в плотине Заамин колеблется от минимального Hmin=884.8 м до максимального Hmax=901.4 м.

На рисунке 6 представлено расположение пьезометрической поверхности, анализ стационарной фильтрации и общего напора воды для плотины Заамин, а также результаты анализа устойчивости плотины. Для корректной оценки фильтрации в теле водохранилища плотины Заамин необходимо определить характер движения фильтрующих вод через тело плотины и оценить влияние пьезометрической поверхности на элементы плотины.

Пьезометрическая поверхность определяет установившийся уровень воды в теле плотины после полного заполнения водохранилища. Результаты правильной оценки местоположения пьезометрической поверхности всегда имели особое значение,

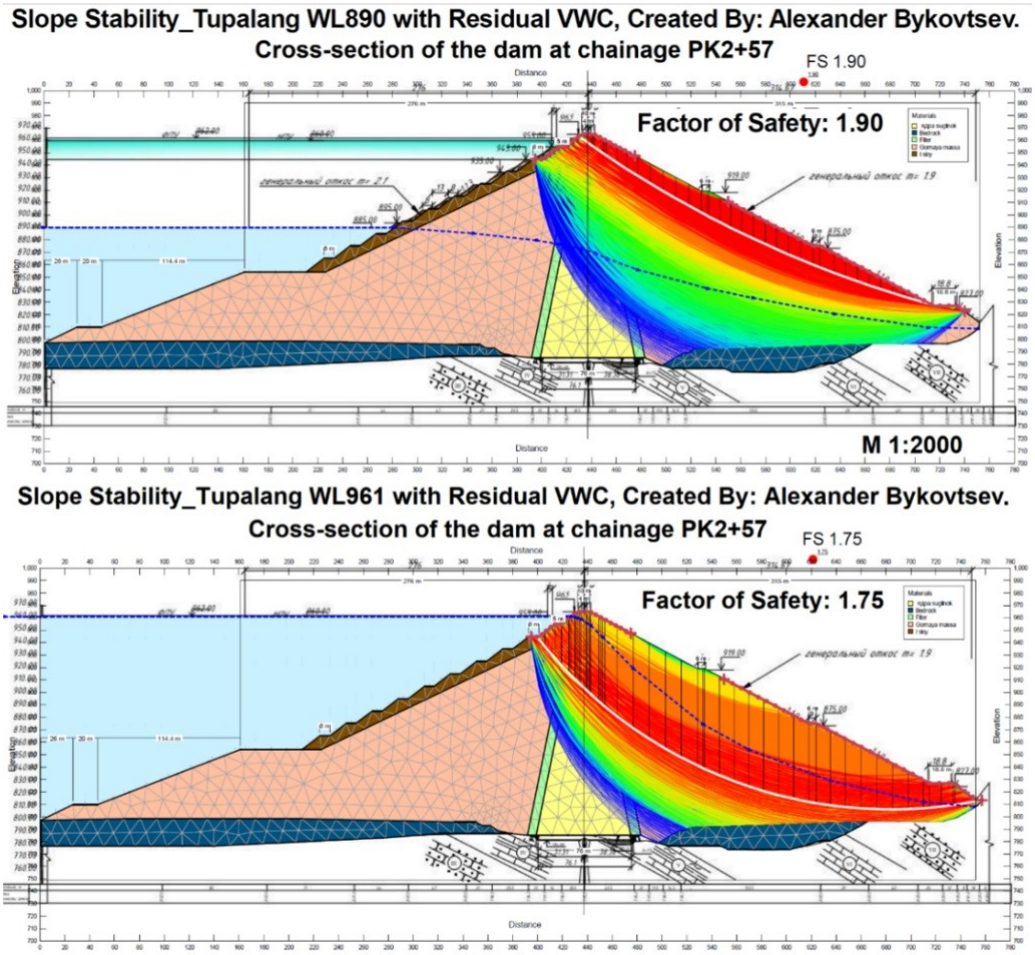


Рис. 5 Анализ устойчивости склонов плотины Тупаланг при различных уровнях воды в водохранилище

поскольку они существенно влияют на оценку устойчивости всей плотины. Местоположение пьезометрической поверхности также оказывает большое влияние на напряженно-деформированное состояние тела плотины и оценку перемещений и деформаций как на гребне плотины, так и внутри ее тела. Для определения пьезометрической поверхности и анализа устойчивости плотины использовались модули SLOPE/W и SEEP/W программного пакета GeoStudio. Дополнительно, для определения расчетных данных о смещениях точек, расположенных на гребнях и бермах плотин, использовался метод конечных элементов с помощью программного обеспечения Plaxis.

Анализ общей устойчивости правого берега плотины Заамин высотой 74 м показал, что весь правый берег находится в неустойчивом состоянии, поскольку коэффициент запаса прочности для верхней бермы меньше требуемого значения 1.5, так как FS=1.389 (рис. 6).

5 Анализ чувствительности дистанционного космического мониторинга за смещениями гребней плотин Чарвак, Тупаланг и Заамин

Агентство космических исследований и технологий при Министерстве цифровых технологий республики сотрудничает с международной компанией Synspective, которая предоставляет данные SAR и услуги дистанционного мониторинга государствен-

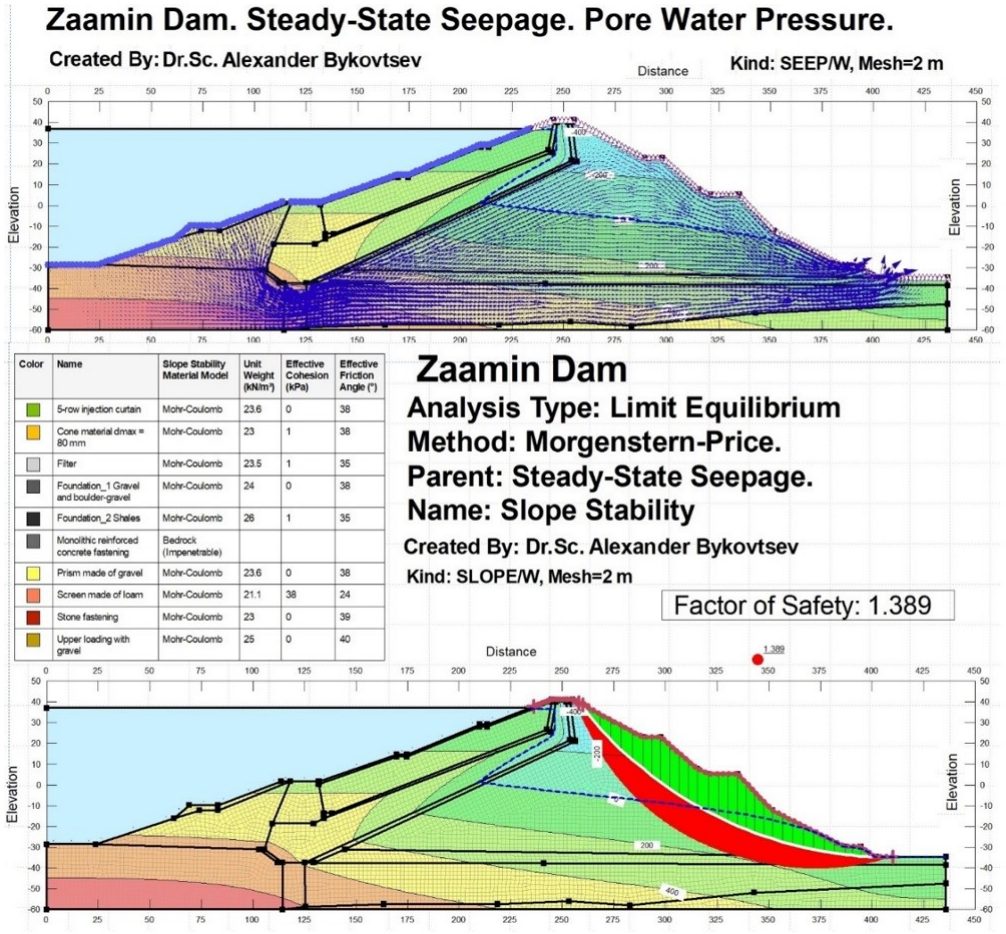


Рис. 6 Расположение пьезометрической поверхности, анализ фильтрации в стационарном режиме, общий напор воды и анализ общей устойчивости насыпи плотины Заамин

ным учреждениям и компаниям по всему миру. Они предоставляют данные SAR с их спутников компаниям, занимающимся анализом данных и разработкой собственных продуктов и решений. Их спутники StriX используют радар с синтезированной апертурой (SAR) для наблюдения и анализа поверхности Земли. В июле 2025 г. состоялись два zoom собрания, на котором представители Synspective рассказали об используемой ими методике и дали ответы на поставленные вопросы об ориентации систем координат: глобальной, локальной и расчетной. По просьбе ИМиСС представители компании Synspective определили ориентацию векторов горизонтальных перемещений для плотин Узбекистана, расположенных под разным углом ориентации в документах «Heading and incident angles of dams.pdf» и «Question on horizontal displacement local coordinates 20250718.pdf».

Компанией Synspective в документе «Heading and incident angles of dams.pdf» объяснены «Углы направления и наклона», а также разъяснено как получаются изображения SAR и почему это приводит к нечувствительности к движению в направлении север-юг в наборе данных.

5.1 Направление и углы падения

Информация Synspective о смещении земной поверхности (LDM) включает: систему координат - WGS84; цифровую модель рельефа (DEM) Copernicus GLO-30; точность геолокации 10 процентов от разрешения DEM, что составляет около 3 м. Координаты каждой точки LDM представлены широтой и долготой на

основе WGS84. Вертикальные компоненты имеют подъем (положительные) и опускание (отрицательные) движения, а горизонтальные компоненты имеют только данные о движении на восток (положительные значения) и на запад (отрицательные значения) в горизонтальном наборе данных. Для горизонтального вектора смещения угол ориентации вектора фиксирован и составляет только 90° (движение на восток) или 270° (движение на запад). На рисунке 7 показано направление орбиты спутника и геометрия между наблюдениями InSAR вдоль линии наблюдения (LOS) и смещениями плотины.

Согласно заявлению компании Synspective, в расчеты LDM уже включены угол направления и угол падения спутника, и дальнейшая обработка не требуется.

Ограничение LDM от Synspective. Из-за траектории вращения спутника SAR компании Synspective и направления съемки, наборы данных не позволяют генерировать горизонтальное перемещение в направлении север-юг (нечувствительны к направлению север-юг), поэтому Synspective предоставляет только значения горизонтального смещения в направлении восток-запад.

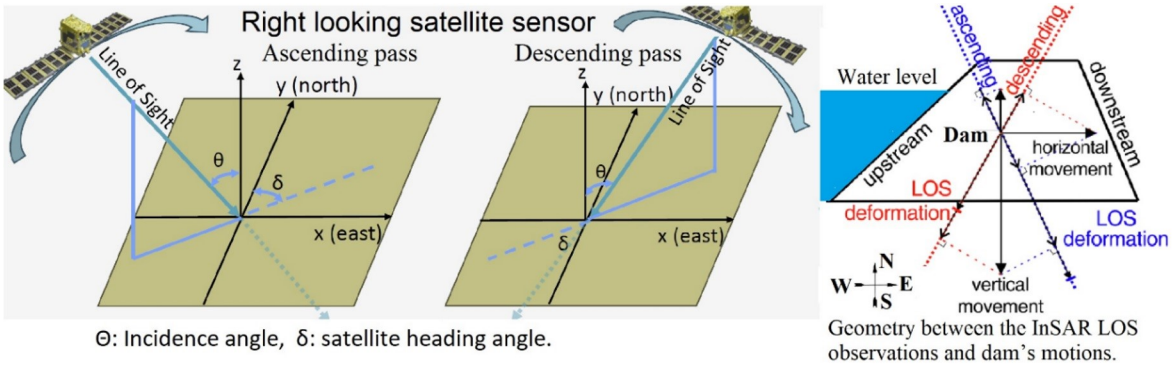


Рис. 7 Направление орбиты спутника и геометрия связи между данными наблюдений InSAR в пределах прямой видимости (LOS) и движением плотины

В документе “Question on horizontal displacement local coordinates 20250718” Synspective представлены примеры для демонстрации методов пересчетов наблюдаемых смещений с расчетными смещениями для гребней плотин Узбекистана.

1. Нечувствительность к горизонтальному смещению в направлении «север-юг» – пример 1 (нехорошо) (Quote: North South insensitivity for horizontal displacement – Example 1 (Not good)) для направления гребня плотины на Восток или азимут 93° (Quote: Dam crest direction East or Bearing 93°) и как заключение не рекомендуется преобразовывать значения горизонтального смещения в локальные координаты для получения V'' (Quote: Conclusion: «Do not recommend transforming horizontal displacement values to local coordinate to obtain V''») с использованием формулы $V'' = V/\cos\alpha$

2. Плотина Charvak. Нечувствительность к горизонтальному смещению в направлении «север-юг» – пример 2 (OK) (Quote: North South insensitivity for horizontal displacement – Example 2 (OK)) для направления гребня плотины: север-северо-восток или азимут 14° (Quote: «Dam crest direction North-NorthEast or Bearing 14°») и как заключение можно получить V'' из V преобразованием. Но нужно иметь в виду, что это может быть неочень точно. Но всё же это гораздо лучше, чем в примере 1 (Quote: Conclusion: It is possible to obtain V'' from V by transformation. But need to be aware that it may not be very accurate. But it is still much better than Example 1).

«север-юг» – пример 3 (неидеально, будьте осторожны) (Quote: North South insensitivity for horizontal displacement –Example 3 (Not ideal, take caution)) для направления гребня плотины запад-северо-запад или азимут -72° или 288°. Преобразуем горизонтальный вектор смещения из LDM V на -72° или 288° в V'' (Quote: Dam crest direction West-NorthWestor Bearing 288°. Transform the horizontal displacement vector from LDM V by -72°or 288°to V'') и как заключение V'' практически совпадает с направлением «север-юг», поэтому достоверность преобразованного значения будет низкой. Это немного лучше, чем в примере 1, но не так хорошо как в примере 2 (Quote: Conclusion: V'' is almost aligned with NS, there will be low confidence in transformed value. This a little better than Example 1 but not as good as Example 2).

4. Плотина Zaamin. Нечувствительность к горизонтальному смещению в направлении «север-юг» – Пример 4 (неидеальный, будьте осторожны) (Quote: North South insensitivity for horizontal displacement –Example 4 (Not ideal, take caution)) для направления гребня плотины север-северо-запад или азимут 68°. Преобразуем вектор горизонтального смещения из LDM V на 68° в V'' (Quote: Dam crest direction North-NorthWestor Bearing 68°. Transform the horizontal displacement vector from LDM V by 68°to V'') и как заключение V'' практически совпадает с направлением «север-юг», преобразованное значение будет иметь низкую достоверность. Это аналогично Примеру 3 (Quote: V'' is almost aligned with NS, there will be low confidence in transformed value. This is similar to Example 3).

6 Заключение

Из приведенного анализа 4-х примеров следует, что методика частично удовлетворительна для плотин, расположенных в направлении «север-юг» с вариациями азимута $\pm 30^{\text{o}}$, и не очень удовлетворительна для плотин с вариациями азимута от $\pm 30^{\text{o}}$ до $\pm 60^{\text{o}}$ и практически не применима для вариаций азимута от $\pm 60^{\text{o}}$ до $\pm 90^{\text{o}}$. Поставляемые данные с платформы, разработанной Synspective, для плотин с ориентацией запад-восток имеют значительные ограничения и их методика не применима для слежения за перемещениями плотин, у которых гребень имеет ориентацию запад-восток с вариациями азимута $\pm 30^{\text{o}}$. Анализ по представленным данным обращается в бесконечность, поэтому предоставляемые данные компанией Synspective являются недостаточными и требуют модификации, которая требует использования дополнительной орбиты, ориентированной вдоль экватора. Согласно информации, предоставленной Synspective, такая возможность у них имеется.

Литература

[1] *Xiao R., Jiang M., Li Z., He X.* New insights into the 2020 Sardoba dam failure in Uzbekistan from Earth observation // International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation, 2022. Vol. 107. 102705. doi: `http://dx.doi.org/10.1016/j.jag.2022.102705`.

[2] *Xie L., Xu W., Ding X., Bürgmann R., Giri S., Liu X.* A multi-platform, open-source, and quantitative remote sensing framework for dam-related hazard investigation: Insights into the 2020 Sardoba dam collapse // International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation, 2022. Vol. 111. 102849. doi: `http://dx.doi.org/10.1016/j.jag.2022.102849`.

[3] *Bykovsev A.S., Yarashov J., Toshmatov E, Khazratkulov I.* Estimation of economically advantageous and stable height for Pskem Dam under seismic impacts generated 10 km from the active fault zone // Proceedings of the 2025 World Congress on Advances in

Structural Engineering and Mechanics. — Busan, Korea: BEXCO, 2025. 0010. Available at: http://www.i-asem.org/publication_conf/asem25/eas/[0010].pdf

[4] *Mirsaidov M., Bykovsev A.,Shukurova S., Ishmatov A, Khazratkulov I., Urinov B.* Strength of the system "structure-foundation-earthquake source"under seismic impacts generated by active faults around the Pskem earth dam taking into account wave energy carryover // Proceedings of the 2025 World Congress on Advances in Structural Engineering and Mechanics. — Busan, Korea: BEXCO, 2025. 0121. Available at: http://www.i-asem.org/publication_conf/asem25/eas/[0121].pdf

UDC 528.854+539.3

SENSITIVITY ANALYSIS OF REMOTE SENSING OF DAM CREST DISPLACEMENTS IN UZBEKISTAN

[1]***Sultanov K. S.,*** [2]***Bykovtsev A. S.,*** [1]***An E. V.***

sultanov.karim@mail.ru; bykovtsev1@yahoo.com; ekaterinaan1986@gmail.com

[1]Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T.Urazbaev, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;

[2]Regional Academy of Natural Sciences, Port Hueneme, CA, United States

The Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T. Urazbaev, Uzbekistan Academy of Sciences, is analyzing satellite based monitoring data from 29 dams in Uzbekistan using StriX synthetic aperture radar (SAR) satellites provided by Synspective. The platform reports displacements on dam crests and berms. These data include horizontal components along the east–west (E–W) direction and vertical components (up–down, perpendicular to the crest surface) for fixed points; however, they do not account for dam azimuth—the angle between the crest axis and geographic north. To address this limitation, we developed a method that transforms the platform outputs into dam centric coordinates and compared those against theoretical stability and displacement results obtained with PLAXIS and GeoStudio. Sensitivity tests indicate that Synspective's methodology is partially satisfactory for crests oriented approximately North – South (N–S) with azimuth deviations up to ±30°, less satisfactory for deviations between ±30° and ±60°, and largely inapplicable for orientations between ±60° and ±90°. For crests oriented predominantly E–W, even within ±30°, the platform data exhibit significant limitations that preclude reliable displacement tracking. Approximately 40 percent of the 29 analyzed dams have E–W oriented crests; the current dataset is therefore insufficient for those sites. Additional acquisition—such as an equator aligned orbit—would mitigate this gap. For rigorous comparison between SAR derived observations and model results, we also outline a framework for converting displacement vectors among global, local, and dam centric computational coordinate systems.

Keywords: space monitoring, movements, dam crest

Citation: Sultanov K. S., Bykovtsev A. S., An E. V. 2026. Sensitivity analysis of remote sensing of dam crest displacements in Uzbekistan. *Problems of mechanics.* 1(35): 31-44.

УДК 539.3:534.1 + 539.374

УПРУГИЕ И УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЯХ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

[1]***Мардонов Б. М.,*** [2]***Аманов С. С.***

batsam@list.ru; amanovsirojiddin50@gmail.com

[1]Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан;

[2]Самаркандский государственный архитектурно-строительный университет им. Мирзо Улугбека, Самарканд, Узбекистан

Аннотация. На практике встречаются задачи, связанные с расчетами стержня или стержневой системы, заглубленные в грунтовую среду. Практически отсутствует изучение вопросов развития пластических деформаций по телу трубопровода. При этом на характер деформирования стержня в значительной степени влияет свойства окружающей стержня грунтовой среды. Это обстоятельство требует более детального анализа динамики формирования и распространения волновых процессов при действии переменных по времени нагрузок, в частности сейсмических. В статье изучены одномерные волновые процессы в упругопластическом круговом стержне полубесконечной длины, поверхность которого контактирует с внешней средой по закону Винклера. Рассмотрены задачи о распространения пластических волн нагружения и разгрузки при мгновенном действии и снижении нагрузки по времени торца стрежня, материал которого деформируется по билинейному закону.

Ключевые слова: стержневая система, грунтовая среда, пластическая деформация,динамика формирования и распространения волновых процессов.

Цитирование: *Мардонов Б. М., Аманов С. С.* Упругие и упруго-пластические волны в стержнях, взаимодействующих с внешней средой // Проблемы механики. – 2026. – №1(35). – С. 45-57.

1 Введение

В динамических расчетах стержней основное внимание уделяется к оценке влияния внешней грунтовой среды на напряженное состояние упругих стержней, где для описания контактной силы взаимодействия используется закон Винклера, согласно которому эта сила принимается пропорциональной перемещению сечениям стержня. В такой постановке в работах [1–4] рассмотрены ряд задач динамики подземных трубопроводов. Как отмечено в работах [5–8] реальные твёрдые тела при каких угодно деформациях обладают в той или иной степени пластическими свойствами. Часто на практике используются теория идеального упруго тела и при этом результаты расчетов, основанные на этих теориях, будут верны до тех пор, пока они не выходят за пределы опытов. Это обстоятельство приобретает важное значение при динамических нагружениях, деформируемых тел.

2 Постановка задачи и методика решения.

2.1 Нагрузка.

Изучим волновые процессы в упруго пластическом круговом стержне полубесконечной длины поверхность которого контактируется с внешней средой по закону

Винклера. Начало координат установим в торце стержня и направим ось Ox вдоль оси стержня. Уравнение движения стержня записываем в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(e)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 u, \tag{1}$$

где $u = u(x,t)$– продольное перемещение произвольного сечения стержня, $e = \frac{\partial u}{\partial x}$– деформация, $a = \sqrt{\frac{d\sigma}{\rho_0 d\varepsilon}}$, $\sigma = \sigma(e)$– экспериментально определяемая зависимость напряжения от деформации, ρ_0– плотность материала стержня, $c^2 = \frac{\pi D k}{\rho_0 F}$, k–−коэфициент жёсткости контакта стержня с внешней средой при продольном сдвиге, D, F–диаметр и площадь поперечного сечения стержня. Полагаем, что связь между напряжением σ и деформацией e определяется по билинейному закону (рис.1)

$\sigma = E_0 e$ при $0 \leqslant e \leqslant e_s$,

$\sigma = E_0 e_s + E_1(e - e_s)$ при $e \geqslant e_s$.

Обозначим через $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ перемещения сечений стержня в каждом участке деформирования и записываем волновые уравнения

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_0^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - c^2 u_1 \quad \text{при} \quad 0 < e < e_s,$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a_1^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - c^2 u_2 \quad \text{при} \quad e > e_s,$$

здесь $a_0 = \sqrt{E/\rho_0}$; $a_1 = \sqrt{E_1/\rho_0}$; E и E_1- соответственно модули упругости и пластичности материала стержня.

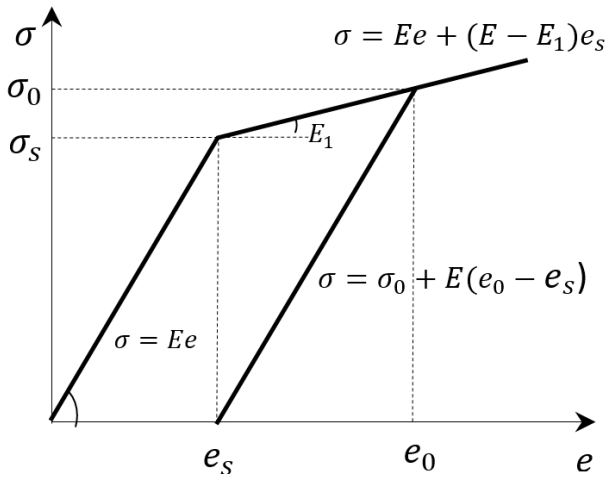


Рис. 1 Закон связи между напряжением и деформацией согласно диаграмме Прандтля.

Уравнение (1) относится к гиперболическому типу и имеет характеристики

$$dx = \pm a\,(u_x)\,dt, \tag{2}$$

и выполняемые вдоль них условия ($u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$)

$$du_t = \pm a\,(u_x)\,du_x - c^2 u dt. \tag{3}$$

Уравнения (2) и(3) можно интегрировать численно при следующих начальных и граничных условиях

$$u = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим сначала случай активного нагружения торца стержня $x = 0$ давлением $p = p_0(t)$ вызывающее деформацию

$$\varepsilon = -e_0 = -\frac{p_0(t)}{E_1}, \tag{5}$$

где полагается $p_0'(t) \geqslant 0$.

Изучим волновые процессы за конечное время $t = t_0$, где длина волнового поля вдоль стержня будет равна $L = a_0 t_0$. Вводя безразмерные переменные $\tau = \frac{a_0 t}{L}$, $\xi = x/L$ дифференциальные уравнения движения частиц стержня в упруго-пластической и упругой областях для моментов времени $0 < t < t_0$ $(0 < \tau < 1)$ записываем в виде:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \lambda^2 u_1 = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \xi \leqslant \gamma_0 \tau \ , \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} - \gamma_0^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} + \lambda^2 u_2 = 0 \quad \text{при} \quad \gamma_0 \tau \leqslant \xi \leqslant \tau, \tag{7}$$

где $\gamma_0 = \sqrt{\frac{E_1}{E}} < 1$, $\lambda = L\sqrt{\frac{\pi D k}{EF}}$, $k-$коэффициент Винклера, характеризующий воздействие внешней среды и представляющий собой силу, приходящуюся на единицу площади поперечного сечения стержня. Значение этого коэффициента зависит от свойств грунта и например для песчаника принимается в диапазоне $(1 \div 10) \cdot 10^6 \text{Н/м}^3$. Для стального стержня ($E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho_0 = 7800$ Н/м^3) диаметром $D = 0,2$ м, толщиной $h = 0,01$ м и длиной $L = 10$ м имеем $t_0 = 0,002$ сек, $\lambda = 0,115 \div 0,444$.

Граничные условия и условия непрерывности перемещений имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi} = f(\tau) \quad \text{при} \quad \xi = 0, \tag{8}$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{при} \quad \xi = \gamma_0 \tau. \tag{9}$$

В дальнейшем влиянием коэффициента Винклера на зависимость между напряжением и деформации на фронте пластической волны не учитываем т.е. полагаем $\lambda^2 = 0$ на фронте пластической волны, которая имеет вид [7,8]

$$\frac{\partial u_1}{\partial \tau} = -\left(1 - \gamma_0\right) e_s - \gamma_0 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \quad \text{при} \quad \xi = \gamma_0 \tau. \tag{10}$$

Решения дифференциальных уравнений (6) и (7) будем искать в следующем виде [9]:

$$u_1 = -\int_0^{\gamma_0 \tau - \xi} \psi'(z) J_0\left(\lambda\sqrt{(z - \gamma_0\tau)^2 - \xi^2}\right) dz -$$

$$-\int_0^{\gamma_0 \tau + \xi} \chi'(z) J_0\left(\lambda\sqrt{(z - \gamma_0\tau)^2 - \xi^2}\right) dz, \quad (0 \leqslant \xi \leqslant \gamma_0 \tau)\,, \tag{11}$$

$$u_2 = -\int_0^{\tau - \xi} \varphi'(z) J_0\left(\lambda\sqrt{(z - \tau)^2 - \xi^2}\right) dz, \quad (\gamma_0 \tau \leqslant \xi \leqslant \tau). \tag{12}$$

Пользуясь условиями (8)-(10), составим систему уравнений для определения функций $\psi(z)$, $\varphi(z)$, $\chi(z)$:

$$\psi'(\gamma_0 \tau) - \ \chi'(\gamma_0 \tau) = f(\tau), \tag{13}$$

$$\int_0^{2\gamma_0\tau} \chi'(z) J_0\left(\lambda\sqrt{(z-\gamma_0\tau)^2-\gamma_0^2\tau^2}\right) dz = \int_0^{(1-\gamma_0)\tau} \varphi'(z) J_0\left(\lambda\sqrt{(z-\tau)^2-\gamma_0^2\tau^2}\right) dz, \tag{14}$$

$$\chi'(2\gamma_0\tau) + \frac{\lambda}{2}\int_0^{2\gamma_0\tau} z\chi'(z)\frac{J_1(\lambda\sqrt{(z-\gamma_0\tau)^2-\gamma_0^2\tau^2})}{\sqrt{(z-\gamma_0\tau)^2-\gamma_0^2\tau^2}}dz = \chi_0 = \frac{1-\gamma_0}{2\gamma_0}\, e_s. \tag{15}$$

Для нахождения решения интегрального уравнении (1) при малых значениях числа λ используется метод разложения функции Бесселя в ряд. В интегральном уравнении (15) ограничимся двумя членами разложения, коэффициенты которого содержит второй степени числа λ. После подстановки $s = 2\gamma_0\tau$ получаем следующее интегральное уравнение:

$$\chi'(s) + \frac{\lambda^2}{32}\int_0^s z\chi'(z)[8 - \lambda^2\left(z^2 - sz\right)]dz = \chi_0. \tag{16}$$

Трижды дифференцируя уравнение (16) по переменной s, получаем

$$\chi'''(s) + \frac{\lambda^2 s}{4}\chi''(s) + \frac{\lambda^4 s^2}{32}\chi'(s) = 0. \tag{17}$$

Полагая $\lambda^4 = 0$, решение уравнения (16) при условиях $\chi(0) = 0$, $\chi'(0) = \chi_0$, $\chi''(0) = 0$ представим в виде:

$$\chi(s) = \chi_0\int_0^s exp(-\frac{\lambda^2}{8}u^2)du. \tag{18}$$

Разложив подинтегральную функцию (18) в ряд и отбросив слагаемые выше порядка λ^4, можно записать:

$$\chi(s) = \chi_0\int_0^s \exp(-\frac{\lambda^2}{8}u^2)du \approx \chi_0(s - \frac{\lambda^2}{24}s^3), \tag{19}$$

$$\chi'(s) = \chi_0\left(1 - \frac{\lambda^2}{8}s^2\right);\ \chi''(s) = -\chi_0\frac{\lambda^2}{4}s;\ \chi'''(s) = -\chi_0\frac{\lambda^2}{4}. \tag{20}$$

Подставляя производную $\chi'(\gamma_0\tau)$ в формуле (13), определяем функцию $\psi(\gamma_0\tau)$

$$\psi(z) = \chi_0\left(z - \frac{\lambda^2}{24}z^3\right) + \int_0^z f\left(\frac{z}{\gamma_0}\right)dz. \tag{21}$$

Подставив найденную функцию $\chi(z)$ в уравнение (14), сохранив два члена разложения функции Бесселя $J_0(z)$ в ряд и с заменой $s_1 = (1-\gamma_0)\tau$, получаем:

$$\frac{\chi_0}{4}\int_0^{\frac{2\gamma_0 s_1}{1-\gamma_0}}(1 - \frac{\lambda^2}{8}z^2)\left[4 - \lambda^2 z^2 + \frac{2\gamma_0\lambda^2 s_1}{1-\gamma_0}z\right]dz = \int_0^{s_1}\varphi'(z)dz -$$

$$-\frac{\lambda^2}{4}\int_0^{s_1} z^2\varphi'(z)dz + \frac{\lambda^2 s_1}{2(1-\gamma_0)}\int_0^{s_1} z\varphi'(z)dz - \frac{(1-\gamma_0^2)s_1^2\lambda^2}{4(1-\gamma_0)^2}\int_0^{s_1}\varphi'(z)dz. \tag{22}$$

Дифференцирую уравнение (22) по s_1 и полагая $\lambda^4 = 0$, получаем линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $y = \varphi'(s_1)$ с переменными коэффициентами:

$$y''(s_1) - \frac{\lambda^2\gamma_0 s_1}{2(1-\gamma_0)}y'(s_1) - \frac{(1+2\gamma_0)\lambda^2}{2(1-\gamma_0)}y(s_1) = 0, \tag{23}$$

и начальными условиями

$$y(0) = \ e_s, \ y'(0) = 0. \tag{24}$$

Обозначив $a = \frac{1+2\gamma_0}{\gamma_0}$, $\beta = \sqrt{\frac{\gamma_0}{2(1-\gamma_0)}}$ и вводя новую переменную $x = s_1\lambda\beta$, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$y'' - xy' - ay = 0. \tag{25}$$

Решение дифференциального уравнения (25) имеет вид [10]:

$$y(x) = C_1(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+2)(a+4)\cdot\ldots\cdot(a+2k-2)}{(2k)!}x^{2k})+$$

$$+C_2\left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a+1)(a+3)(a+5)\cdot\ldots\cdot(a+2k-1)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right). \tag{26}$$

Используя граничные условия (24) определяем постоянные $C_1 = \ e_s, \ C_2 = 0$ и решение (25) запишем в следующем виде:

$$y\left(s_1\right) = \varphi'\left(s_1\right) = \ e_s[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{k}(a+2j-2)}{(2k)!}(\beta\lambda s_1)^{2k}]. \tag{27}$$

Поставляя выражений функции $\psi'(z), \ \chi'(z)$ и $\varphi'\left(s_1\right)$ в формулах (11) и (12) определяем пермещений $u_1(\xi,\tau)$ и $u_2(\xi,\tau)$:

$$u_1 = -\int_0^{\gamma_0\tau-\xi}\left[\chi_0\left(1-\frac{\lambda^2}{8}z^2\right) + f\left(\frac{z}{\gamma_0}\right)\right]J_0\left(\lambda\sqrt{\left(z-\gamma_0\tau\right)^2-\xi^2}\right)dz-$$

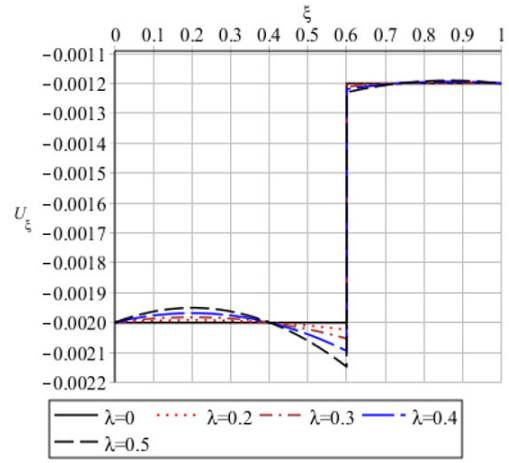
$$-\chi_0\int_0^{\gamma_0\tau+\xi}\left(1-\frac{\lambda^2}{8}z^2\right)J_0\left(\lambda\sqrt{\left(z-\gamma_0\tau\right)^2-\xi^2}\right)dz, \ (0 \leqslant \xi \leqslant \gamma_0\tau), \tag{28.1}$$

$$u_2 = -\int_0^{\tau-\xi} \ e_s\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{k}(a+2j-2)}{(2k)!}\left(\beta\lambda s_1\right)^{2k}\right]J_0\left(\lambda\sqrt{(z-\tau)^2-\xi^2}\right)dz$$

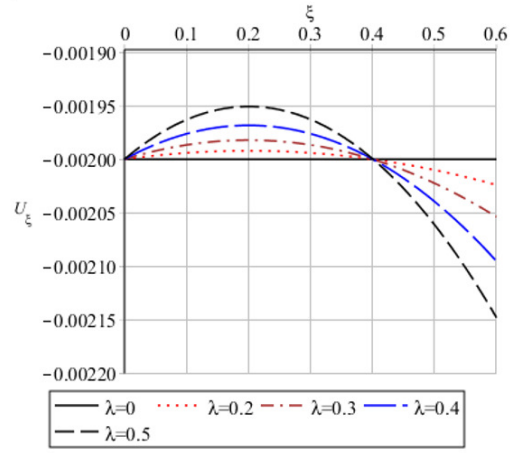
$$(\gamma_0\tau \leqslant \xi < \tau). \tag{28.2}$$

Рассмотрим случай нагружения торца стержня постоянным давлением $p = p_0$ где деформация будет равна $\frac{\partial u_1}{\partial x} = f(\tau) = -\varepsilon_0 = -\frac{p_0}{E_1}$. Расчеты выполнялись для следующих значениях скорости распространения упругой волны: $a_0 = 5000$ м/сек и значениях деформаций $\varepsilon_0 = 0,002; \ \ e_s = -0,0012$. На рисунке 2 представлены графики изменения деформаций по координате ξ при $\tau = 1$ во всей зоне деформирования (a,d) и отдельно в упруго пластической (b,e) и упругой (c,f) зонах для различных значений параметров λ и γ_0. На рис.2j представлены графики распределения деформации по длине стержня при отсутствии пластической зоны. В расчетах принято $E = 2\cdot 10^{11}$ Па, $\rho_0 = 7800$ кг/м^3, $D = 0,2$ м, $h = 0,01$ м, $L = 10$ м, $\tau_0 = 1$ ($t_0 = = 0,002$ сек).

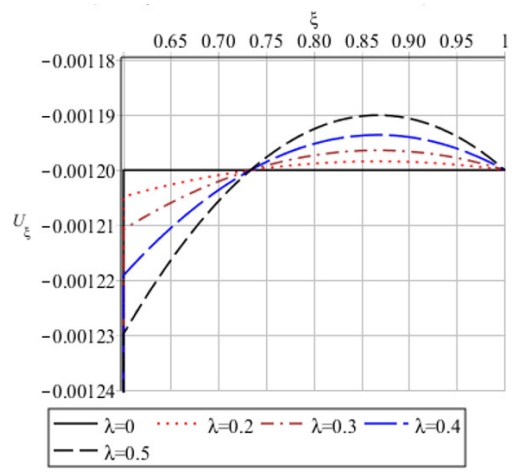
a)



b)

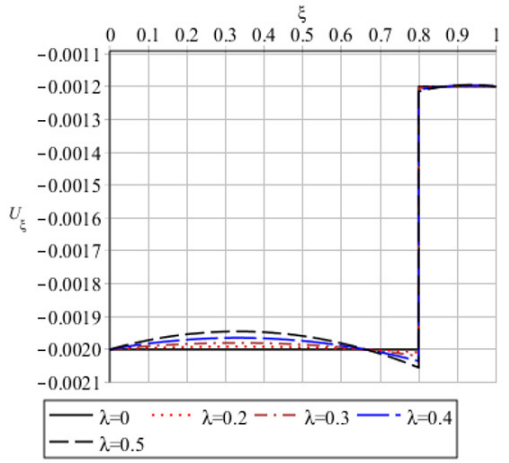


c)

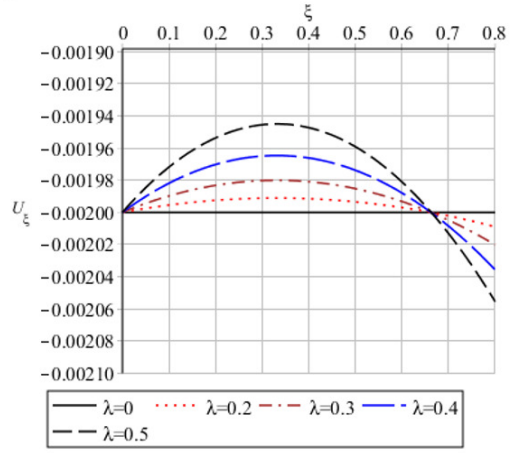


Графики зависимости деформации от координаты (ξ) при $\gamma_0 = 0,6$ и различных значениях параметра λ.

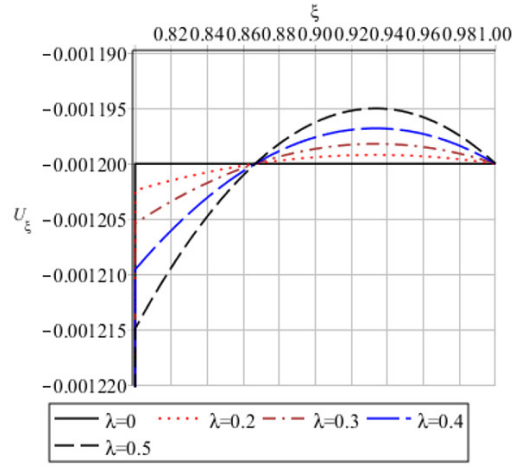
d)



e)



f)



Графики зависимости деформации от координаты (ξ) при $\gamma_0 = 0,8$ и различных значениях параметра λ.

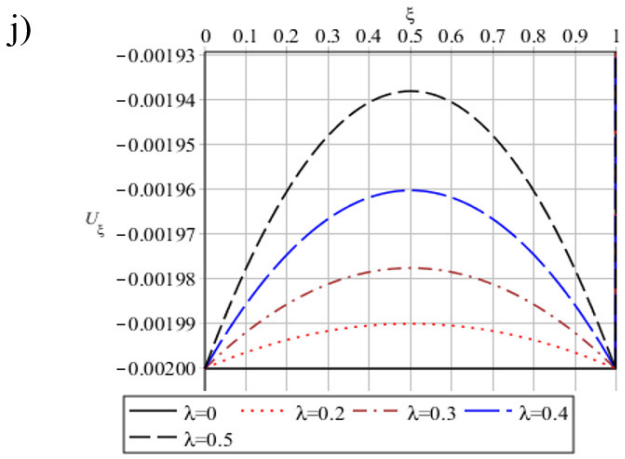


Рис. 2 Графики зависимости деформации от координаты (ξ) при $\gamma_0 = 1$ и различных значениях параметра λ..

Из анализа кривых, представленных на рис.2 следует, при наличии контакта поверхности стержня с внешней средой волновой характер распределения деформации по длине сохраняется. При этом в упруго пластической зоне $0 \leqslant \xi \leqslant \gamma_0\tau$ сначала с места нагружения наблюдается частичное разгружение и далее нагружение $\varepsilon > \varepsilon_0$, в упругой зоне $\gamma_0\tau \leqslant \xi < \tau$, наоборот стержень сначала частично нагружается и далле происходит разгрузка до деформации сжатия ε_0. При отсутствии пластического закона деформирования в материале стержня волновое поле не содержит разрыв деформации. При этом вдоль стержня наблюдается только частичная разгрузка (рис.2j).

2.2 Разгрузка.

Пусть теперь после мгновенного нагружения сечения стержня происходит снижение давления. В этом случае, как отмечено в работах [5-8] в стержне формируются и распространяются волны нагрузки и разгрузки. При этом закон распространения волны разгрузки определяется из условий непрерывности скорости деформации на фронте этой волны. Зависимость напряжения от деформации в безразмерных переменных $\tau = \frac{a_0 t}{L}$, $\xi = \frac{x}{L}, \overline{u} = u/L$ записывается в виде:

$$\sigma(\xi,\tau) = \sigma_0(\xi) - E\left[e_0(\xi) - e(\xi,\tau)\right], \tag{29}$$

здесь $e_0(\xi)-$ деформация на фронте разгрузки, подлежащая определению.

Дифференциальное уравнение продольного движения трубопровода, взаимодействующего с грунтом, записывается в виде:

$$\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\tau^2} = \frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\xi^2} - \lambda^2\overline{u} + \overline{\varphi}(\xi), \quad \overline{\varphi} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\sigma_0(\xi)}{E} - e_0(\xi)\right]. \tag{30}$$

Рассмотрим процесс разгрузки стержня при условии, что на свободном конце стержня давление изменяется по закону:

$$p(\tau) = \sum_{n=0}^{N} p_n L^n \tau^n, \quad (\frac{dp}{d\tau} < 0). \tag{31}$$

Рассмотрим случай реализации закона Прантля между напряжением и деформацией, согласно которому при $\tau = 0$ формируются и распространяются упругая волна

со скоростью a_0, и волна разгрузки Рахматулина, распространяющейся со скоростью a_1, одновременно являющейся пластической. Уравнение волны разгрузки принимаем в виде $\tau = \xi/\gamma_0$. На фронте волны разгрузки деформации сечений стержня задаются как $e_0(x)$, а после прохождения волны через сечение напряжение и деформация устанавливаются равными σ_s, e_s.

Общее решение дифференциального уравнения (30) ищем в следующем виде [6]:

$$\overline{u}(\xi,\tau) = \overline{u}_0(\xi) + F_1(\tau+\xi) + F_2(\tau-\xi), \tag{32}$$

здесь:

$$\overline{u}_0(\xi) = -\frac{1}{E}\int_0^{\xi} [\sigma_0(z) - Ee_0(z)]\cosh\big(\lambda(\xi - z)\big)\,dz, \tag{33}$$

$$F_1(\tau+\xi) = \varphi_1(\tau+\xi) + \lambda\xi\int_0^{\tau+\xi} \varphi_1(z)\frac{J_1\left(\lambda\sqrt{(\tau-z)^2-\xi^2}\right)}{\sqrt{(\tau-z)^2-\xi^2}}dz, \tag{34}$$

$$F_2(\tau-\xi) = \varphi_2(\tau-\xi) - \lambda\xi\int_0^{\tau-\xi} \varphi_2(z)\frac{J_1\left(\lambda\sqrt{(\tau-z)^2-\xi^2}\right)}{\sqrt{(\tau-z)^2-\xi^2}}dz. \tag{35}$$

На волне разгрузки $\tau = \xi/\gamma_0$ записываем условие непрерывности деформации и скорость частиц в поперечном сечении стержня

$$-\frac{\sigma_0(\xi)}{E}+\lambda\int_0^{\xi}\left(e_0(z)-\frac{\sigma_0(z)}{E}\right)sh[\lambda(\xi-z)]dz+F_1'\left[\left(\frac{1}{\gamma_0}+1\right)\xi\right]-F_2'\left[\left(\frac{1}{\gamma_0}-1\right)\xi\right]=0, \tag{36}$$

$$F_1'\left[\left(\frac{1}{\gamma_0}+1\right)\xi\right] + F_2'\left[\left(\frac{1}{\gamma_0}-1\right)\xi\right] = -\frac{\psi\,(e_0)}{a_0}, \tag{37}$$

здесь: $\psi(e_0) = \int_0^{e_s} a_0 du_x + \int_{e_s}^{e_0(\xi)} a_1 du_x = a_0 e_s + a_1\,[e_0(\xi) - e_s]$.

Из диаграммы Прандтля получаем следующую зависимость между напряжением и деформацией:

$$\sigma_0(\xi) = E\,e_s + E_1\big(e_0(\xi) - e_s\big). \tag{38}$$

С учётом формулы (38) решаем уравнения (36) и (37) относительно функций $F_1'\left[\left(\frac{1}{\gamma_0}+1\right)\xi\right]$, $F_2'\left[\left(\frac{1}{\gamma_0}-1\right)\xi\right]$;

$$F_1'\left[\left(\frac{1}{\gamma_0}+1\right)\xi\right] = \frac{1}{2}\{\frac{\sigma_s - E_1e_s}{E} - \left(1-\frac{a_1}{a_0}\right)e_s + \left(\frac{E_1}{E}-\frac{a_1}{a_0}\right)e_0(\xi) -$$

$$-\lambda\int_0^{\xi}[\left(1-\frac{E_1}{E}\right)e_0(z) - \frac{\sigma_s - E_1e_s}{E}]sh(\lambda\xi - \lambda z)dz\}, \tag{39}$$

$$F_2'\left[\left(\frac{1}{\gamma_0}-1\right)\xi\right] = -\frac{1}{2}\{\frac{\sigma_s - E_1e_s}{E} + \left(1-\frac{a_1}{a_0}\right)e_s + \left(\frac{E_1}{E}+\frac{a_1}{a_0}\right)e_0(\xi) -$$

$$-\lambda\int_0^{\xi}[\left(1-\frac{E_1}{E}\right)e_0(z) - \frac{\sigma_s - E_1e_s}{E}]sh(\lambda\xi - \lambda z)dz\}. \tag{40}$$

На свободном конце стержня $\xi = 0$ напряжение и деформацию запишем по формуле (31) следующим образом:

$$p_0 = \sigma_0(0), \quad e_0(0) = e_s + \frac{p_0 - \sigma_s}{E_1}. \tag{41}$$

После прохождения волны разгрузки по формуле (29) можно определить нормальное напряжение в любом сечении стержня, а деформация в сечении $\xi = 0$ вычисляется с помощью этой формулы

$$e(0,\tau) = e_0(0) + \frac{\sum_{n=0}^{N} p_n \tau^n - p_0}{E} = e_0(0) + \frac{p(\tau) - p_0}{E}. \tag{42}$$

Из общего решения (32) при $\xi = 0$ получаем следующее выражение:

$$e(0,\tau) = e_0(0) - \frac{p_0}{E} + F_1'(\tau) - F_2'(\tau). \tag{43}$$

Для найденных функций $F_1'\left[\left(\frac{1}{\gamma_0}+1\right)\xi\right]$, $F_2'\left[\left(\frac{1}{\gamma_0}-1\right)\xi\right]$ делаем замену $\xi = \frac{\gamma_0}{1\pm\gamma_0}\tau$ и подставляем в формулу (42). Сравнивая левую часть формул (42) и (43) и приравнивая их правые части, функцию $sh(x)$ разлагаем в ряд, отбрасывая члены, содержащие множитель λ^3. Вводим обозначения: $\frac{\sigma_s - E_1 e_s}{E} = \left(1 - \frac{E_1}{E}\right) e_s$, $\mu = \frac{1}{\gamma_0} = \frac{a_0}{a_1}$, $\frac{1}{\mu^2} = \gamma_0^2 = \frac{E_1}{E}$, $\frac{\gamma_0}{1\pm\gamma_0} = \frac{1}{\mu\pm1}$. После упрощений получаем следующее уравнение:

$$(1-\gamma_0^2)e_s + \frac{1}{2}\left(\gamma_0^2 - \gamma_0\right) e_0\left(\frac{\gamma_0}{1+\gamma_0}\tau\right) + \frac{1}{2}\left(\gamma_0^2 + \gamma_0\right) e_0\left(\frac{\gamma_0}{1-\gamma_0}\tau\right) -$$

$$-\frac{\lambda^2}{2}\left(1-\gamma_0^2\right)\int_0^{\frac{\gamma_0}{1+\gamma_0}\tau}\left[e_0(z) - e_s\right]\left(\frac{\gamma_0}{1+\gamma_0}\tau - z\right)dz -$$

$$-\frac{\lambda^2}{2}\left(1-\gamma_0^2\right)\int_0^{\frac{\gamma_0}{1-\gamma_0}\tau}\left[e_0(z) - e_s\right]\left(\frac{\gamma_0}{1-\gamma_0}\tau - z\right)dz = \frac{p(\tau)}{E}. \tag{44}$$

Рассмотрим случай, когда напряжение на свободном конце стержня $\xi = 0$ убывает по линейному закону:

$$p(\tau) = p_0\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right). \tag{45}$$

Представим деформацию в виде ряда: $e_0(\xi) = \sum_{n=0}^{N} b_n L^n \xi^n$ и ограничимся тремя членами ряда:

$$e_0(\xi) = b_0 + b_1 L\xi + b_2 L^2 \xi^2, \tag{46}$$

$b_0,\ b_1, b_2-$ коэффициенты определяются следующим образом:

$$b_0 = \frac{p_0}{E_1} - \left(\frac{1}{\gamma_0^2} - 1\right) e_s,\ b_1 = -\frac{p_0}{\tau_0 E_1}\cdot\frac{1-\gamma_0^2}{2\gamma_0 L},\ b_2 = \frac{\lambda^2}{2\gamma_0^2 L^2}\cdot\frac{1-\gamma_0^4}{\gamma_0^2+3}\left(\frac{e_s}{\gamma_0^2} - \frac{p_0}{E_1}\right).$$

Коэффициенты b_0, b_1, b_2 подставляем в формулу (46):

$$e_0(\xi) = \frac{p_0}{E_1} - \left(\frac{1}{\gamma_0^2} - 1\right) e_s - \frac{p_0}{\tau_0 E_1}\cdot\frac{1-\gamma_0^2}{2\gamma_0}\xi + \frac{\lambda^2}{2\gamma_0^2}\cdot\frac{1-\gamma_0^4}{\gamma_0^2+3}\left(\frac{e_s}{\gamma_0^2} - \frac{p_0}{E_1}\right)\xi^2. \tag{47}$$

Анализ формулы (47) показал, что $e_0(\xi)$ является убывающей функцией деформации, которая в сечении $\xi = \xi_k$ уменьшается до $e_0(\xi_k) = e_s$. (Рис.3)

Точка (ξ_k, τ_k) соответствует концу волны разгрузки:

$$e_0(\xi_k) = \frac{p_0}{E_1} - \left(\frac{1}{\gamma_0^2} - 1\right) e_s - \frac{p_0}{\tau_0 E_1}\cdot\frac{1-\gamma_0^2}{2\gamma_0}\xi_k + \frac{\lambda^2}{2\gamma_0^2}\cdot\frac{1-\gamma_0^4}{\gamma_0^2+3}\left(\frac{e_s}{\gamma_0^2} - \frac{p_0}{E_1}\right)\xi_k^2 = e_s.$$

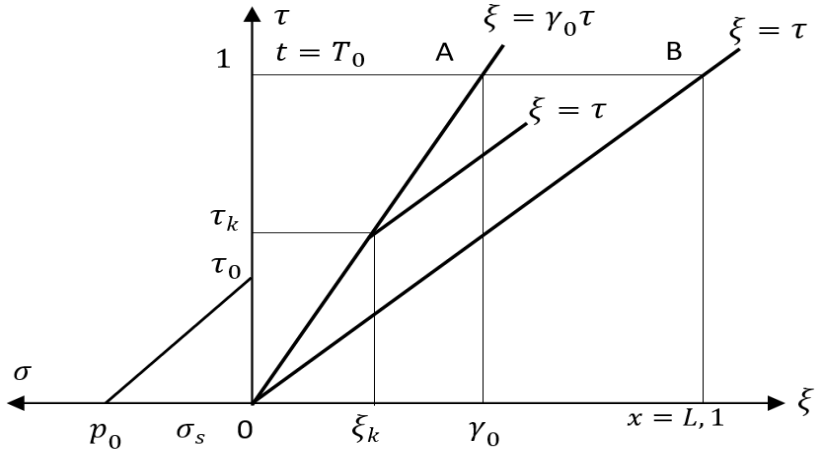


Рис. 3 Схема волновой картины распространения упругих и упруго-пластических волн в плоскости (τ, ξ) в стержне длиной L для моментов времени $t \leqslant L/a$.

Откуда получаем зависимость ξ_k от безразмерного времени продолжительности τ_0 действия приведенного давления $\eta = \frac{p_0}{\sigma_s}$;

$$\frac{\lambda^2}{2\gamma_0^2} \cdot \frac{1-\gamma_0^4}{\gamma_0^2+3}(\eta-1)\xi_k^2 + \eta \cdot \frac{1-\gamma_0^2}{2\gamma_0\tau_0}\xi_k - \eta + 1 = 0. \tag{48}$$

Уравнение (48) при $\frac{p_0}{\sigma_s} > 1$ имеет положительный корень:

$$\xi_k = \frac{-\eta \cdot \frac{1-\gamma_0^2}{2\gamma_0\tau_0} \pm \sqrt{\left(\eta \cdot \frac{1-\gamma_0^2}{2\gamma_0\tau_0}\right)^2 + 2\frac{\lambda^2}{\gamma_0^2} \cdot \frac{1-\gamma_0^4}{\gamma_0^2+3}(\eta-1)^2}}{\frac{\lambda^2}{\gamma_0^2} \cdot \frac{1-\gamma_0^4}{\gamma_0^2+3}(\eta-1)}. \tag{49}$$

Пользуясь условием $\xi_k \leqslant \gamma_0$ из решения (49) можно определить значения параметров $\tau_0, \lambda, \gamma_0$ при котором релизуется принятая схема формиррования и распространения упруго и упруго пластисческих волн в стержне.

Если решение уравнения (54) удовлетвлряет условию $\xi_k > \gamma_0$, то процесс разгрузки в плоскости (τ, ξ) происходит только в точке $A(1, \gamma_0)$.

На рисунке представлены графики зависимости ξ_k от $\eta = \frac{p_0}{\sigma_s}$ при различных значениях параметров $\tau_0, \lambda, \gamma_0$.

Из анализа графиков видно (Рис.4), что на длину зоны распространения пластической зоны существенное влияние оказывают отношение скоростей распространения упругих и пластических волн γ_0 и безразмерное время действия давления τ_0 на торец стержня. При этом параметр λ, характеризующий коэффициент взаимодействия поверхности стержня с грунтовым основанием, при высоких значениях безразмерного времени τ_0 приводит к снижению длиныэтой зоны.

Влияние параметров τ_0, γ_0, η при $\lambda = 0,5$ на распределение деформации $e_0(\xi)/e_s$ показано на рис.5

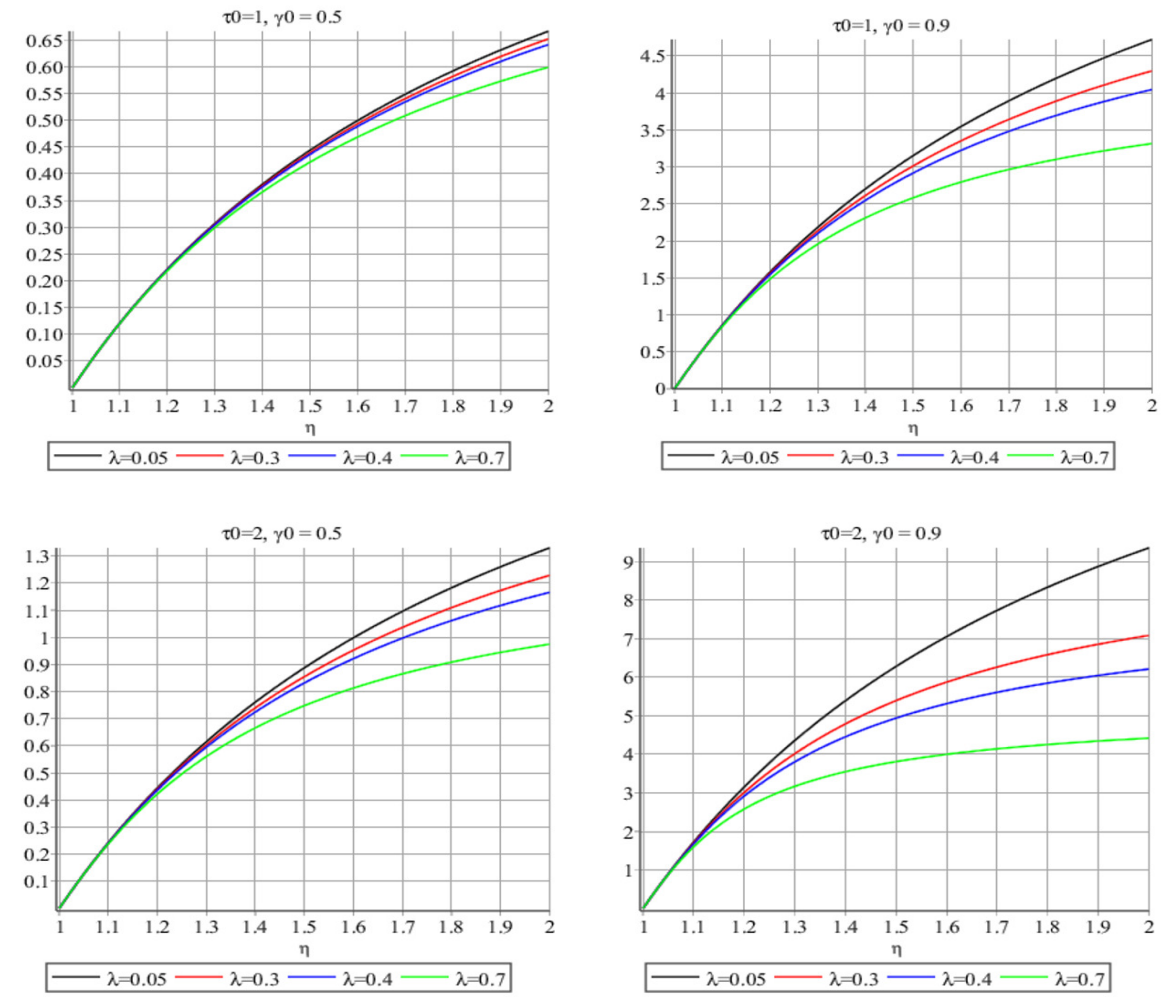


Рис. 4 График зависимости $\xi_k = \frac{ct_k}{L}$ (безразмерная длина пластической зоны распространения деформации) от отношения $\eta = p_0/\sigma_s$ при различных значениях τ_0, λ, γ_0: черные - $\lambda = 0,05$, красные - $\lambda = 0{,}3$, синие - $\lambda = 0,4$, зеленые - $\lambda = 0,7$.

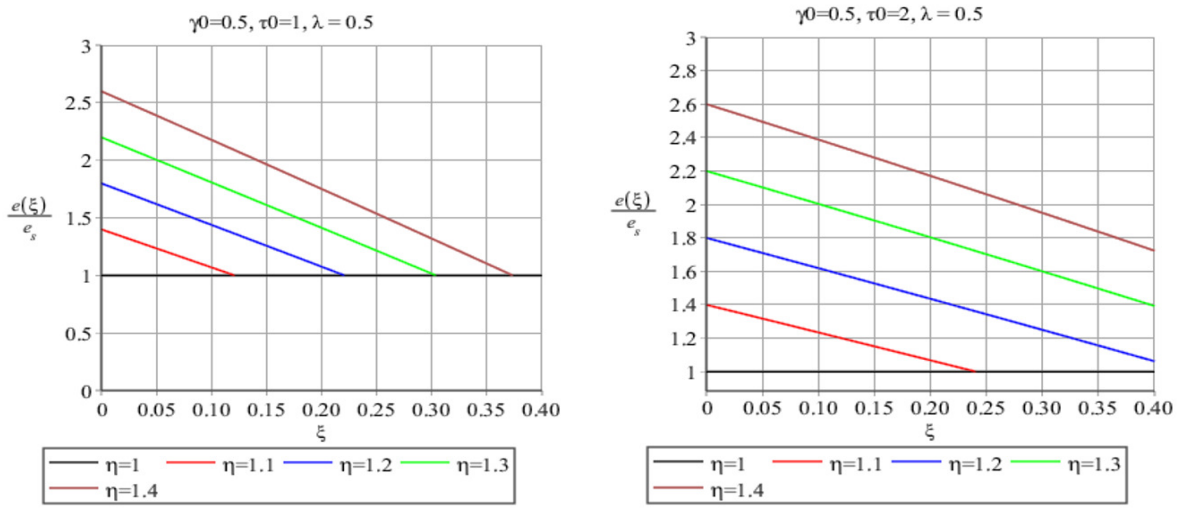


Рис. 5 Распределение деформации в зоне пластичности при $\gamma_0 = 0,5$ и различных значениях параметров τ_0, η: черные - $\eta = 1,0$, красные - $\eta = 1,1$, синие - $\eta = 1,2$, зеленые - $\eta = 1,3$, коричневые - $\eta = 1,4$.

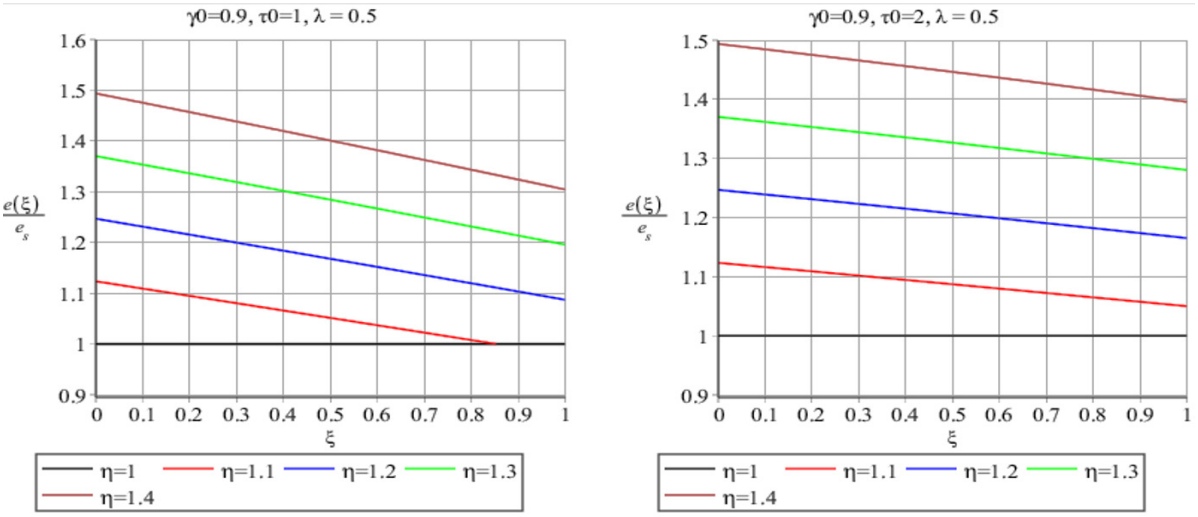


Рис. 6 Распределение деформации в зоне пластичности при $\gamma_0 = 0,9$ и различных значениях параметров τ_0, η: черные - $\eta = 1,0$, красные - $\eta = 1,1$, синие - $\eta = 1,2$, зеленые - $\eta = 1,3$, коричневые - $\eta = 1,4$.

Расчеты показали незначительное влияние параметра λ на закон распределения деформации в зоне пластичности. При этом максимальная деформация достигается в точке начала формирования пластической волны, значение которой существенно зависит от отношения скоростей упругих и пластических волн и от величины нагружаемого давления.

3 Заключение

Установлены закономерности влияния закона взаимодействия стержня с внешней средой на процесс формирования и распространения упруго и упруго пластических волн. В случае выполнения условия $\lambda < 1$ показано, что наличия контакта стержня по закону Винклера не влияет характер формирования волнового поля вдоль стержня. При использовании закона деформирования стержня по закону Прандтля перед фронтом пластических волн обнаружено дополнительное сжатие стержня, а за фронтом упругой волны незначительное изменение его деформации. С ростом величины нагружаемого давления установлено рост длины пластической зоны,увеличение значения параметра λ приводит ее снижению. Существенный рост значения деформации стержня в пластической зоне может достигаться при малых значениях отношения скоростей распространения упругих и упруго пластических волн.

Литература

[1] *Рашидов Т. Р.* Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. Ташкент: Фан, 1973. – 180 с.

[2] *Рашидов Т. Р., Кузнецов С. В., Мардонов Б. М., Мирзаев И.* Прикладные задачи сейсмодинамики сооружений. — Ташкент: Navro‘z, 2019. — 268 с.

[3] *Султанов К. С.* Волновая теория сейсмостойкости подземных сооружений. Ташкент: Фан, 2016. – 392 с.

[4] *М.Ш.Исраилов, Б.Мардонов, Т.Р.Рашидов* Сейсмодинамика подземного трубопровода при неидеальном контакте с грунтом, влияние проскальзывания на динамичекие напряжения. // ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, 2016. Т. 57. №6. С. 189–197. doi: http://dx.doi.org/10.15372/PMTF20160621.

[5] *Рахматулин Х. А.* О распространении волн разгрузки // Прикладная математика и механика, 1945. Т. 9. №1. С. 91-100.

[6] *Илюшин А. А.* Пластичность Ч.1 – Упруго-пластические деформации. Государственное издательство технико-теоритической литературы Москва 1948, Ленинград.378 стр.

[7] *Новацкий В. К.* Волновые задачи теории пластичности. Издательство «Мир» Москва, 1978.

[8] *Скобеев А. М.* К теории волны разгрузки // Прикладная математика и механика, 1962. Т. 26. №6.

[9] *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике: Учебное пособие. -3-е изд., стереотип.-М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980, 688 стр.

[10] *Э.Камке* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Издательство «Наука», Москва 1965 г. 422 стр.

UDC 539.3:534.1 + 539.374

ELASTIC AND ELASTOPLASTIC WAVES IN RODS INTERACTING WITH AN EXTERNAL MEDIUM.

[1*]***Mardonov B.M.,*** [2]***Amanov S.S.***

batsam@list.ru; amanovsirojiddin50@gmail.com

[1]M.T.Urazbaev Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

[2]Samarkand State Architectural and Construction University named after Mirzo Ulugbek, Samarkand, Uzbekistan

In practice, problems arise related to the calculations of a rod or rod system embedded in the soil. There is virtually no study of the development of plastic deformations along the body of the pipeline. Moreover, the nature of the deformation of the rod significantly influences the properties of the surrounding soil. This circumstance requires a more detailed analysis of the dynamics of the formation and propagation of wave processes under the action of quality over time, particularly seismic ones. This article examines one-dimensional wave processes in an elastic-plastic circular rod of semi-infinite length, whose surface is in contact with the external medium according to Winkler's law. Problems of propagation of plastic loading and unloading waves are considered for instantaneous and time-decreasing loading of the rod's end face, whose material deforms according to a bilinear law.

Keywords: rod system, soil medium, plastic deformation, dynamics of wave formation and propagation.

Citation: Mardonov B.M., Amanov S.S. 2026. Elastic and Elastoplastic Waves in Rods Interacting with an External Medium.. *Problems of mechanics.* 1(35): 45-57.

УДК 539.3

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ РАСЧЕТА МНОГОЭТАЖНЫХ ЗДАНИЙ ПРИ ПРОДОЛЬНЫХ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ*

Усаров М.К., Исаев Г.У., Шамсиев Д.К.

*umakhamatali@mail.ru

Институт механики и сейсмостойкости сооружений им.М.Т.Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан.

В статье приведено численное решение динамической задачи продольных колебаний многоэтажного здания с пространственным фундаментом на основе пространственной континуальной пластинчатой модели, разработанной с использованием бимоментной теории пластин. Приводятся выражения приведенных модулей упругости и плотности, а также основные уравнения продольных колебаний, граничные и контактные условия для многоэтажного здания. Получены численные результаты расчетов перемещений и напряжений, а также их максимальные значения при продольных колебаниях многоэтажных зданий.

Ключевые слова: Многоэтажное здание, бимоментная теория, пластинчатая модель, сейсмическая нагрузка, продольные колебания, пространственный фундамент, напряжения, перемещения, ускорение, уравнение движения, граничные условия, контактные условия.

Цитирование: *Усаров М.К., Исаев Г.У., Шамсиев Д.К.* Пространственные модели и методы расчета многоэтажных зданий при продольных сейсмических воздействиях // Проблемы механики. – 2026. – №1(35). – С. 58-68.

1 Введение

Вопрос сейсмопрочности и устойчивости многоэтажных, а также высотных зданий и сооружений ещё остаётся одной из сложных задач науки механики деформируемого тела и динамики сооружений. Следует отметить, что действующие в настоящее время во многих стран мира нормативные документы по расчету многоэтажных зданий, ограничивают этажность и разработка пространственной модели и методика пространственного расчета многоэтажных зданий при сейсмических воздействиях остается актуальной задачей. В статье [1] представлены результаты сравнительного анализа сейсмостойкости пяти различных конструктивных систем многоэтажных гражданских зданий (высота этажа – 3 м, количество этажей – 20): каркасно-стеновая, каркасно-ствольная, ствольно-стеновая, каркасно-ствольно-диафрагмовая, каркасно-ствольно-оболочковая системы. Сумма эффективных модальных масс, учтенных в расчете, составила не менее 90 % общей массы системы, возбуждаемой по направлению действия сейсмического воздействия для горизонтальных воздействий, и не менее 75 % – для вертикального воздействия. Оценка сейсмического воздействия на каркасы зданий показывает, что нерегулярные здания больше повреждаются по сравнению с обычными [2]. Совсем недавно, исследование в [3] повторно рассмотрело влияние геометрической нерегулярности на реакцию высотных зданий при ветровой нагрузке. Наличие геометрических нерегуляр-

*Работа выполнена в Институте механики и сейсмостойкости сооружений им.М.Т.Уразбаева АН РУз в рамках бюджетной темы фундаментальных исследований.

ностей увеличивало аэродинамические нагрузки на здание, что привело к более высоким изгибающим моментам и сдвиговым силам. Подводя итог, можно сказать, что геометрическая нерегулярность может оказывает значительное влияние на реакцию конструкций при различных нагрузках. Исследования показали, что нерегулярности в геометрии конструкции могут привести к увеличению боковой деформации, концентрации напряжений и более высокому динамическому отклику. Поэтому важно тщательно учитывать геометрические нерегулярности при проектировании и строительстве конструкций, чтобы обеспечить их безопасность и долговечность. В области акустики входящие углы могут создавать стоячие волны и приводить к фокусировке звука, что может отрицательно влиять на характеристики аудиосистем. Исследователи изучили влияние угла падения из-за движений грунта на сейсмических воздействий для одноэтажных конструкций, подверженных двунаправленным движениям грунта [4, 5]. Из-за увеличения боковых смещений и дрейфа, конструкции с нерегулярной геометрической конфигурацией вызывают серьезные повреждения по сравнению с конструкциями с правильной геометрией при сильных колебаниях грунта, как указано в [6]. Сдвиг основания можно напрямую использовать для сравнения реакции зданий разной этажности и их веса, что делает его полезным инструментом для сейсмического проектирования [7]. Статья [8] посвящена важным достижениям в области оценки сейсмической уязвимости зданий с целью предложения подходящую процедуру оценки сейсмостойкости существующих зданий. Статья [9] посвящена численному решению задачи о поперечных колебаниях многоэтажного здания в рамках континуальной пластинчатой модели при сейсмическом воздействии. В качестве динамической модели здания предлагается консольная анизотропная пластина, теория которой разработана в рамках трехмерной динамической теории упругости и учитывает не только структурные силы и моменты, но и бимоменты. Статья [10-15] посвящена динамическому расчету коробчатой конструкции зданий на сейсмостойкость с учетом пространственной работы коробчатых элементов под действием динамического воздействия. Развитие пространственных расчетов и исследование колебаний элементов конструкций коробчатого типа с учетом различных факторов является актуальной задачей строительной механики. Разработаны математическая модель и численно-аналитический метод решения задачи динамики методом конечных разностей и расширение решения по формам собственных колебаний в пространственной постановке элементов коробчатых конструкций при кинематическом воздействии. Исследованы установившиеся вынужденные колебания коробчатых конструкций при стационарных гармонических воздействиях, приложенных к основанию конструкции, и выделены области, где при гармонических воздействиях возникают наибольшие значения перерезывающих сил и изгибающих моментов. Введем следующие обозначения: E_1, E_2, E_3 – модули упругости; G_{12}, G_{13}, G_{23}– модули сдвига; $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ – коэффициенты Пуассона для ортотропного материала пластины. Для многоэтажного здания в качестве исходных данных задаются следующие размеры здания. Внешние размеры многоэтажного здания с поперечным размером $H = 2h$ и размерами a, b в плане.

2 Постановка пространственной задачи о продольно-сдвиговых колебаниях многоэтажных зданий

Относительно задач следует отметить, что бимоментная теория пластин описывается двумя системами дифференциальных уравнений независимого движения, описывающих симметричная и антисимметричная задачи, каждое из которых форму-

лируется на основе девяти двумерных уравнений с соответствующими граничными условиями. Определяющие соотношения и уравнения равновесия бимоментной теории пластин разработаны с использованием закона Гука и уравнения теория упругости и приведены в работах [13]. В данном случае приводятся уравнения движения, граничные условия и основные соотношения бимоментной теории толстых пластин и показаны ее преимущества среди существующих теорий толстых пластин. Задача о продольных колебаниях многоэтажного здания является симметричной задачей бимоментной теории пластинчатых сооружений, разработанной в [12-15]. Сейсмические колебания многоэтажного здания в рамках пластинчатой модели рассматриваются в прямоугольной декартовой координатной системе x_1, x_2 и z.

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = \dfrac{u_1^{(+)} + u_1^{(-)}}{2}, \quad \bar{\psi}_1 = \dfrac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} u_1 dz, \quad \bar{\beta}_1 = \dfrac{1}{2h^3}\int\limits_{-h}^{h} u_1 z^2 dz, \\ \bar{u}_2 = \dfrac{u_2^{(+)} + u_2^{(-)}}{2}, \quad \bar{\psi}_2 = \dfrac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} u_2 dz, \quad \bar{\beta}_2 = \dfrac{1}{2h^3}\int\limits_{-h}^{h} u_2 z^2 dz \\ \bar{W}_1 = \dfrac{u_3^{(+)} - u_3^{(-)}}{2}, \qquad \bar{r} = \dfrac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} u_3 z dz, \qquad \bar{\gamma} = \dfrac{1}{2h^4}\int\limits_{-h}^{h} u_3 z^3 dz. \end{cases} \tag{1}$$

Введены следующие грузовые члены

$$\bar{q}_1 = \frac{q_1^{(+)} - q_1^{(-)}}{2}, \qquad \bar{q}_2 = \frac{q_2^{(+)} - q_2^{(-)}}{2}, \qquad \bar{q}_3 = \frac{q_3^{(+)} + q_2^{(-)}}{2}. \tag{2}$$

Удельные усилия N_{11}, N_{12}, N_{22} и напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ определены выражениями:

$$\begin{cases} N_{11} = \int\limits_{-h}^{h} \sigma_{11} dz = H\left(E_{11}\dfrac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial x_1} + E_{12}\dfrac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial x_2} + E_{13}\dfrac{2\bar{W}}{H}\right), \\ N_{22} = \int\limits_{-h}^{h} \sigma_{22} dz = H\left(E_{12}\dfrac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial x_1} + E_{22}\dfrac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial x_2} + E_{23}\dfrac{2\bar{W}}{H}\right), \\ N_{12} = \int\limits_{-h}^{h} \sigma_{12} dz = N_{21} = G_{12}H\left(\dfrac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial x_1}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Бимоменты P_{11}, P_{22}, P_{12}.

$$\begin{cases} P_{11} = \dfrac{1}{h^2}\int\limits_{-h}^{h} \sigma_{11} z^3 dz = \dfrac{H^2}{2}\left(E_{11}\dfrac{\partial\bar{\beta}_1}{\partial x_1} + E_{12}\dfrac{\partial\bar{\beta}_2}{\partial x_2} - E_{13}\dfrac{2(3\bar{\gamma} - \bar{W})}{H}\right), \\ P_{22} = \dfrac{1}{h^2}\int\limits_{-h}^{h} \sigma_{22} z^3 dz = \dfrac{H^2}{2}\left(E_{12}\dfrac{\partial\bar{\beta}_1}{\partial x_1} + E_{22}\dfrac{\partial\bar{\beta}_2}{\partial x_2} - E_{23}\dfrac{2(3\bar{\gamma} - \bar{W})}{H}\right), \\ P_{12} = P_{21} = \dfrac{1}{h^2}\int\limits_{-h}^{h} \sigma_{12} z^3 dz = \dfrac{H^2}{2} G_{12}\left(\dfrac{\partial\bar{\beta}_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\bar{\beta}_2}{\partial x_1}\right). \end{cases} \tag{4}$$

Удельные поперечные бимоменты $\bar{p}_{13}, \bar{p}_{23}$, и $\bar{\tau}_{13}, \bar{\tau}_{23}$

$$\begin{cases} \bar{p}_{13} = G_{13}\left(\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial x_1} + \dfrac{2(\bar{u}_1 - \bar{\psi}_1)}{H}\right), \quad \bar{\tau}_{13} = G_{13}\left(\dfrac{\partial\bar{\gamma}}{\partial x_1} + \dfrac{2(\bar{u}_1 - 3\bar{\beta}_1)}{H}\right), \\ \bar{p}_{23} = G_{23}\left(\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial x_2} + \dfrac{2(\bar{u}_2 - \bar{\psi}_2)}{H}\right), \quad \bar{\tau}_{23} = G_{23}\left(\dfrac{\partial\bar{\gamma}}{\partial x_2} + \dfrac{2(\bar{u}_2 - 3\bar{\beta}_2)}{H}\right) \end{cases} \tag{5}$$

Удельные бимоменты $\bar{p}_{33}$ и $\bar{\tau}_{23}$

$$\begin{cases} \bar{p}_{33} = E_{31}\dfrac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial x_1} + E_{32}\dfrac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial x_2} + E_{33}\dfrac{2\bar{W}}{H}, \\ \bar{\tau}33 = E_{31}\dfrac{\partial\bar{\beta}_1}{\partial x_1} + E_{32}\dfrac{\partial\bar{\beta}_2}{\partial x_2} + E_{33}\dfrac{2\bar{W}-4\bar{r}}{H} \end{cases} \tag{6}$$

Бимоменты $\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{12}, \quad \bar{\sigma}_{22}$ определяются по формулам

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{11} = \left(E^0_{11} - \dfrac{E^0_{13}}{E^0_{33}}(E^0_{31}+G^0_{31})\right)\dfrac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_1} + \left(E^0_{12} - \dfrac{E^0_{13}}{E^0_{33}}(E^0_{31}+G^0_{31})\right)\dfrac{\partial\bar{u}_2}{\partial x_2} + \dfrac{E^0_{13}}{E^0_{33}}\bar{q}_3, \\ \bar{\sigma}_{22} = \left(E^0_{21} - \dfrac{E^0_{32}}{E^0_{33}}(E^0_{32}+G^0_{32})\right)\dfrac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_1} + \left(E^0_{22} - \dfrac{E^0_{23}}{E^0_{33}}(E^0_{32}+G^0_{32})\right)\dfrac{\partial\bar{u}_2}{\partial x_2} + \dfrac{E^0_{23}}{E^0_{33}}\bar{q}_3, \\ \bar{\sigma}_{12} = G^0_{12}\left(\dfrac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\bar{u}_2}{\partial x_1}\right). \end{cases} \tag{7}$$

Максимальные напряжения между продольной и поперечной стенами определяются по формулам:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}^*_{12} = G_{13}\left[\dfrac{210(9\bar{\beta}_1 - 2\bar{\psi}_1 - \bar{u}_1)}{H} - 30\dfrac{\partial\bar{W}}{\partial\bar{x}_1}\right] + \dfrac{30}{H}\bar{q}_1 + \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\bar{q}_3}{E_{33}}\right), \\ \bar{\sigma}^*_{23} = G_{23}\left[\dfrac{210(9\bar{\beta}_2 - 2\bar{\psi}_2 - \bar{u}_2)}{H} - 30\dfrac{\partial\bar{W}}{\partial\bar{x}_1}\right] + \dfrac{30}{H}\bar{q}_1 + \dfrac{1}{36}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\bar{q}_3}{E_{33}}\right), \\ \bar{\sigma}^*_{33} = E_{33}\dfrac{210(33\bar{\gamma} - 9\bar{W} - 4\bar{r})}{H} - \dfrac{42}{H}E_{31}\dfrac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_1} - \dfrac{42}{H}E_{32}\dfrac{\partial\bar{u}_2}{\partial x_2} - \\ -E_{31}\dfrac{\partial^2\bar{W}}{\partial x_1^2} - E_{32}\dfrac{\partial^2\bar{W}}{\partial x_2^2} + \dfrac{42}{H}\bar{q}_3 + E_{31}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\bar{q}_1}{G_{13}}\right) + E_{32}\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\bar{q}_2}{G_{23}}\right). \end{cases} \tag{8}$$

Уравнения движения и граничные условия.

Уравнения движения продольного колебания многоэтажного здания в рамках пластинчатой модели также описываются с помощью трех систем из девяти уравнений. Первая система уравнений состоит из уравнений продольной и тангенциальной сил:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial N_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{2\bar{q}_1}{H} = \rho\ddot{\bar{\psi}}_1, \\ \dfrac{\partial N_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial N_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{2\bar{q}_2}{H} = \rho\ddot{\bar{\psi}}_2, \end{cases} \tag{9}$$

Вторая система уравнений состоит из уравнений продольный и тангенциальный бимоментов имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{T}_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \bar{T}_{12}}{\partial x_2} - \dfrac{4\bar{p}_{13}}{H} + \dfrac{2\bar{q}_1}{H} = \rho\ddot{\bar{\beta}}_1, \\ \dfrac{\partial \bar{T}_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \bar{T}_{22}}{\partial x_2} - \dfrac{4\bar{p}_{23}}{H} + \dfrac{2\bar{q}_2}{H} = \rho\ddot{\bar{\beta}}_2, \end{cases} \tag{10}$$

Система дифференциальных уравнений сейсмических колебаний многоэтажного здания относительно интенсивностей поперечных продольных и тангенциальных бимоментов построена в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{p}_{13}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \bar{p}_{23}}{\partial x_2} - \dfrac{2\bar{p}_{33}}{H} + \dfrac{2\bar{q}_3}{H} = \rho\ddot{r}. \\ \dfrac{\partial \bar{\tau}_{13}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \bar{\tau}_{23}}{\partial x_2} - \dfrac{6\bar{\tau}_{33}}{H} + \dfrac{2\bar{q}_3}{H} = \rho\ddot{\bar{\gamma}}. \end{cases} \tag{11}$$

Третья система уравнений состоит из уравнений продольный и сжимающий бимоментов:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \bar{\sigma}_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\bar{\sigma}^*_{13}}{H} = \rho\ddot{\bar{u}}_1, \\ \dfrac{\partial \bar{\sigma}_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \bar{\sigma}_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\bar{\sigma}^*_{23}}{H} = \rho\ddot{\bar{u}}_2, \\ \dfrac{\partial \bar{q}_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \bar{q}_2}{\partial x_2} + \dfrac{\bar{\sigma}^*_{33}}{H} = \rho\ddot{\bar{W}}. \end{cases} \tag{12}$$

На свободных боковых гранях здания имеем условия равенства нулю сил, моментов, бимоментов и силовых факторов:

$$N_{11} = 0, N_{12} = 0, \bar{T}_{11} = 0, \bar{T}_{12} = 0, \bar{p}_{13} = 0, \bar{\tau}_{13} = 0, \bar{\sigma}_{11} = 0, \bar{\sigma}_{12} = 0, \bar{\sigma}_{13} = 0. \tag{13}$$

На свободной верхней грани здания имеем условия:

$$N_{12} = 0, N_{22} = 0, \bar{T}_{12} = 0, \bar{T}_{22} = 0, \bar{p}_{23} = 0, \bar{\tau}_{23} = 0, \bar{\sigma}_{12} = 0, \bar{\sigma}_{22} = 0, \bar{\sigma}^*_{23} = 0, \tag{14}$$

На боковых гранях здания, расположенных в грунте, имеем условия равенства силовых факторов и нагрузок со стороны грунта:

$$\begin{cases} N_{11} = N^{gr}_{11}, \quad N_{12} = N^{gr}_{12}, \quad \bar{T}_{11} = T^{gr}_{11}, \quad \bar{T}_{12} = T^{gr}_{12}, \quad \bar{p}_{13} = p^{gr}_{13}, \\ \bar{\tau}_{13} = \bar{\tau^{gr}}_{12}, \quad \bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}^{gr}_{12}, \quad \bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma} gr_{12}, \quad \bar{\sigma}_{13} = \bar{\sigma}^{gr}_{12}, \end{cases} \tag{15}$$

На свободной верхней грани здания имеем условия:

$$\begin{cases} N_{12} = N^{gr}_{12}, \quad N_{22} = N^{gr}_{22}, \quad \bar{T}_{12} = p^{gr}_{11}, \quad \bar{T}_{22} = p^{gr}_{22}, \quad \bar{p}_{23} = p^{gr}_{23}, \\ \bar{\tau}_{23} = \bar{\tau^{gr}}_{23}, \quad \bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}^{gr}_{12}, \quad \bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma} gr_{22}, \quad \bar{\sigma}_{23} = \bar{\sigma}^{gr}_{23}, \end{cases} \tag{16}$$

На поверхности контактной зоны многоэтажного здания и плитного фундамента поверхностные условия сопряжения при продольных колебаниях запишутся в виде:

$$\begin{cases} \bar{\psi}_1 = \bar{\psi}_1^0, \quad \bar{\psi}_2 = \bar{\psi}_2^0, \quad \bar{\beta}_1 = \dfrac{1}{3}\bar{\beta}_1^0, \quad \bar{\beta}_2 = \dfrac{1}{3}\bar{\beta}_2^0, \\ \bar{u}_2 = \bar{u}_2^0, \quad \bar{r} = \bar{r}^0, \quad \bar{\gamma} = \bar{\gamma}^0, \quad \bar{W} = \bar{W}^0, \end{cases} \tag{17}$$

где $\bar{\psi}_i^0, \quad \bar{\beta}_i^0, \quad (i = 1, 2), \quad \bar{r}^0, \quad \bar{\gamma}^0, \quad \bar{W}^0$−обобщенные перемещения верхней части поверхности фундамента при продольных колебаниях.

3 Численный метод решения задачи.

Численный метод решения задачи. При аппроксимации производных от перемещений, напряжений и силовых факторов используется следующие формулы метода конечных разностей. Производные от функций обобщенных перемещений в центральной точки разбиения определяем по формулам центральной разности

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x_1}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x_2}. \tag{18}$$

При аппроксимации производных от напряжений, сил, моментов и бимоментов используются центральные конечно-разностные схемы на полушагах, которые имеют второй порядок точности:

$$\frac{\partial F_{i,j}^k}{\partial x_1} = \frac{F_{i+\frac{1}{2},j}^k - F_{i-\frac{1}{2},j}^k}{\Delta x_1}, \quad \frac{\partial F_{i,j}^k}{\partial x_2} = \frac{F_{i+\frac{1}{2},j}^k - F_{i-\frac{1}{2},j}^k}{\Delta x_2} \quad (i = 1, N; \quad j = 1, M). \tag{19}$$

Здесь $\Delta x_1 = \dfrac{a}{N}, \Delta x_2 = \dfrac{b}{M}$– шаг вычисления метода сеток, N, M – количество делений на сетку. Вторую производную функции по времени в рамках метода конечных разностей представим в виде:

$$\frac{\partial^2 f_{i,j}^k}{\partial t^2} = \frac{f_{i,j}^{k+1} - 2f_{i,j}^k + f_{i,j}^{k-1}}{\Delta t^2} \tag{20}$$

где Δt – шаг по времени. При реализации численного метода решения поставленной задачи шаги по пространственным координатам и времени выберем следующим образом:

$$\Delta t \leqslant min(\Delta x_1, \Delta x_2).$$

В общем случае условия сходимости метода конечных разностей определяются с учетом следующих выражений:

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x_1} = \frac{1}{k_1}, \quad \frac{c\Delta t}{\Delta x_2} = \frac{1}{k_2}.$$

Здесь, k_1, k_2− целые положительные числа; при решении задачи принято условие $min(k_1, k_2) \geqslant 4$.

3.1 Задание исходных данных.

Задание механических и геометрических параметры многоэтажного здания, фундамента и грунтового основания и грузовые члены их уравнений продольных колебаний. В общем случае задаются упругие характеристики материалов элементов

конструкции зданий, фундамента и грунтового основания. Для многоэтажного здания в качестве исходных данных задаются следующие размеры здания. Внешние размеры многоэтажного здания с поперечным размером $H = 2h$ и размерами a, b в плане. Высота и длина многоэтажного здания принимаются, соответственно равными $b = nb_1$ и a где n количество комнат по ширине одного этажа, b_1 – размер одной вертикальной поперечной стены (высота одного этажа многоэтажного здания); h_1 - толщина внешних продольных вертикальных несущих стен; h_2 – толщина внутренних межкомнатных поперечных вертикальных стен; h_{per}– толщина перекрытия. Геометрические характеристики панелей комнат и внешние размеры зданий должны быть заданы как исходные данные. Считаем, что внешние стены состоят из железобетона с модулем упругости $E = 20000$МПа , плотностью $\rho = 2500\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, коэффициентом Пуассона $\nu = 0.25$. Внешние размеры здания и плит задаём следующими. a, b, H– общие длина, высота и ширина многоэтажного здания. Размеры плит здания:

$$h_1 = 0.25\text{м}, \quad h_2 = 0.2\text{м}, \quad h_{per} = 0.2\text{м}, \quad a_1 = 5\text{м}, \quad b_1 = 3\text{м},$$

Введем коэффициенты определения модулей упругости ξ_{11}, ξ_{22}, ξ_{33}, ξ_{12}, ξ_{13}, ξ_{23}, и плотности ξ_0, приведенные в работах [13-15], с помощью которых приведены модули упругости и сдвигов и плотность пластинчатой модели многоэтажного здания. Приведенные модули упругости и сдвигов здания определяются по следующим формулам:

$$\begin{cases} E_1^{pr} = \xi_{11}E_0, \quad E_2^{pr} = \xi_{22}E_0, \quad E_3^{pr} = \xi_{33}E_0, \\ \\ G_{12}^{pr} = \xi_{12}G_0, \quad G_{12}^{pr} = \xi_{12}G_0, \quad G_{23}^{pr} = \xi_{23}G_0 \end{cases} \tag{21}$$

а приведенная плотность здания определяется выражением

$$\rho_{pr} = \zeta_0\rho_0.$$

Значения коэффициентов приведения ξ_{11}, ξ_{22}, ξ_{33}, ξ_{12}, ξ_{13}, ξ_{23}, ξ_0, в общем случае для каждой ячейки (комнаты) зависят от размера и строительного материала плит каждой комнаты рассматриваемого многоэтажного здания. Вычисленные значения коэффициентов приведенных модулей упругости и плотности для континуальной модели здания по формулам (21) при заданных исходных данных приведены в таблице 1.

Таблица 1 Коэффициенты определения модулей упругости континуальной модели здания при заданных исходных данных.

Ширина	Коэффициенты модулей упругости						
H(м)	ξ_0	ξ_{11}	ξ_{12}	ξ_{13}	ξ_{22}	ξ_{23}	ξ_{33}
15	0.100	0.093	0.060	0.067	0.117	0.04	0.09
18	0.089	0.083	0.050	0.067	0.107	0.04	0.09
20	0.082	0.078	0.045	0.067	0.102	0.04	0.09

3.2 Анализ численных результатов.

Численные расчеты произведены в предположении, что сейсмическое движение грунта происходит в направлении оси OZ (вдоль ширины здания) в виде ускорения

основания здания:

$$\ddot{u}_0(t) = a_0 cos(\omega_0 t) \tag{22}$$

где $a_0 = k_c g$ - максимальное ускорение и $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ – круговая частота грунтового основания, k_c и ν_0 - коэффициент балльности землетрясения и собственная частота внешнего воздействия, соответственно.
Отсюда получим, перемещения основания здания в виде:

$$u_0(t) = \frac{A_0}{2}(1 - cos(\omega_0 t)). \tag{23}$$

Здесь $A_0 = \dfrac{2k_c g}{\omega_0^2}$.
Отметим, что коэффициенты сейсмичности для семибалльного, восмибалльного и девятибалльного землетрясений равны $k_c = 0.1, 0.2, 0.4$, соответственно.

В таблице 2 приведены максимальные значения напряжений σ_{22} в измерениях МПа, возникающие в нижний точках 9, 12 и 16-этажных зданий, колебающихся под периодическими внешними силами с частотамы в диапазоне 1.4 -4.4 Гц.

Таблица 2 Максимальные значения продольного напряжения σ_{22}, MPa

σ_{22}, Мпа						
ν_0, Гц	9 этаж		12 этаж		16 этаж	
1.4	0.212	-2.503	0.325	-3.514	0.514	-6.321
1.6	0.299	-2.710	0.421	-4.255	0.725	-6.512
1.8	0.300	-2.974	0.524	-4.242	1.525	-7.213
2.0	0.321	-3.036	0.622	-4.323	2.321	-8.258
2.2	0.358	-3.143	0.724	-4.535	4.120	-10.51
2.4	0.48	-3.375	1.125	-4.825	12.01	-19.36
2.6	0.525	-3.473	1.325	-5.751	РЕЗОНАНС	РЕЗОНАНС
2.8	0.635	-3.568	1.636	-5.325	8.012	-14.12
3.0	0.845	-3.658	2.283	-6.212	3.532	-9.120
3.2	0.954	-3.747	2.543	-6.535	3.412	-8.802
3.4	1.124	-3.954	4.525	-8.255	3.014	-8.503
3.6	1.325	-4.122	8.254	-12.12	2.501	-8.365
3.8	1.536	-4.312	20.24	-23.21	2.023	-7.812
4.0	1.656	-4.521	РЕЗОНАНС	РЕЗОНАНС	1.821	-6.189
4.2	1.823	-4.812	22.14	-25.24	1.512	-5.264
4.4	2.123	-5.254	12.25	-16.12	1.228	-4.545

Отметим, что частота возможных колебаний в Республике Узбекистан находится, примерно, в диапазоне 2.6-3.8 Гц. В резонансных состояниях, возникших в численных экспериментах, вместо значений напряжений в табл. 2 написано слово РЕЗОНАНС. Результаты получены для многоэтажных зданий с количеством этажей, начиная от 9 до 28, при постоянной длины и ширины здания: $a = 30, H = 15$м. Максимальное значение нормального напряжения в нижней части наружной стены 9-этажного здания принимает небольшие значения в диапазоне от $\sigma_{22} = -3.568$ МПа до $\sigma_{22} = 4.312$ МПа при восьми балльных сейсмических воздействиях (таблица 2). Максимальные

значения нормального напряжения в нижней части внешней стены 12-этажного здания получены для диапазона частот от 2.8 до 3.6 Гц, птакже принимает небольшие значения в пределах от $\sigma_{22} = -5.325$ МПа до $\sigma_{22} = -12.12$ МПа . Как видно, при восьмибалльном сейсмическом воздействии, когда частота внешнего воздействия близка к частоте $\nu = 4$ Гц (таблица 2) максимальное значение напряжения достигает резонансного состояния. Максимальное значение нормальнного напряжения в нижней части внешней стены 16-этажного здания, при восьмибалльных сейсмических воздействиях в диапазоне частот от 2.8 до 3.6 Гц принимает значения в пределах от $\sigma_{22} = -14.12$ МПа до $\sigma_{22} = 8.365$ Мпа . Максимальные значения напряжения σ_{22}, МРа в зависимости от частоты продольных колебаний восьмибалльного внешнего воздействия и этажности для высотных зданий шириной Н=15м приведены в таблице 2.

В таблице 3 приведены максимальные значения напряжений σ_{22} в измерениях МПа, возникающих в нижний точках зданий 20, 24 и 28 этажей, колеблющихся под периодическими внешними воздействиями в диапазоне 1.4 -4.0 Гц.

Таблица 3 Максимальные значения продольного напряжения σ_{22} МПа

σ_{22}, МПа						
ν_0, Гц	20 этаж		24 этаж		28 этаж	
1.4	1.111	-7.125	1.500	-9.321	1.022	-10.32
1.6	2.102	-8.500	1.812	-9.512	0.500	-9.401
1.8	4.012	-11.12	1.100	-8.514	0.412	-9.310
2.0	4.500	-10.81	0.833	-8.325	0.300	-9.023
2.2	4.02	-10.50	0.542	-8.369	0.532	-9.022
2.4	2.500	-9.365	0.915	-7.814	0.530	-9.020
2.6	2.121	-8.256	0.841	-7.712	0.529	-9.199
2.8	1.303	-7.812	0.765	-7.599	0.512	-9.000
3.0	1.222	-7.514	0.841	-7.600	0.536	-9.101
3.2	1.112	-7.217	0.832	-8.559	0.412	-9.200
3.4	1.333	-7.841	0.662	-8.558	0.500	-9.415
3.6	0.912	-6.945	0.654	-8.555	0.514	-9.410
3.8	0.710	-6.565	0.642	-8.542	1.336	-9.633
4.0	0.501	-6.212	1.011	-8.500	2.000	-10.52

Из анализа расчетов численных результатов, можно сделать заключение, что колебания напряжений, возникающие в 20-, 24- и 28-этажных зданиях, которые находятся под воздействием продольных волн с частотами, близкими к частотам, встречающимся на территории Узбекистана, далеки от резонанса и не опасны для этих зданий. Максимальные значения напряжения σ_{22}, МРа в зависимости от частоты продольных колебаний восьмибалльного внешнего воздействия и этажности для высотных зданий шириной Н=18м приведены в таблице 3.

4 Заключение

Пространственная континуальная пластинчатая модель многоэтажных зданий усовершенствована с учетом дискретности их конструкций и слоистости грунтов основания. На основе бимоментной теории пластинчатых конструкций выведены урав-

нения движения пространственного основания, взаимодействующего с грунтом, а также соответствующие граничные условия на кромках пространственного основания и контактные условия взаимодействия с грунтом. Разработаны методы и программы для динамического расчета перемещений, ускорений и напряженных состояний многоэтажного здания в рамках пространственно-непрерывной пластинчатой модели с использованием явной схемы метода конечных разностей. Анализ полученных численных результатов показал, что пластинчатая модель может быть использована для описания динамического поведения многоэтажных зданий при сейсмическом воздействии и расчета напряженного состояния. В рамках пластинчатой модели многоэтажного здания с плитным фундаментом предложены методы определения перемещений, напряжений, усилий, моментов и бимоментов, а также проведены расчеты для многоэтажных и высотных зданий при сейсмических воздействиях.

Литература

[1] *Z.K. Abaev, M.Y. Kodzaev , A.A. Bigulaev* . Earthquake resistance analysis of structural systems of multi-storey civil buildings, Journal of Structural mechanics of engineering constructions and buildings,2020. 16(1). Pp - 76–82

[2] *S.E. Abdel Raheem, M.M.M. Ahmed, M.M. Ahmed, and A.G A. Abdelshafy* 2."Evaluation of plan configuration irregularity effects on seismic response demands of L-shaped MRF buildings", Bulletin of Earthquake Engineering, vol. 16, pp. 3845–3869, 2018.

[3] *R.K. Meena, R. Raj, and S. Anbukumar* 'Effect of wind load on irregular shape tall buildings having different corner configuration', Sādhanā, vol. 47, no. 3, p. 126, 2022

[4] *A.B. Rigato and R.A. Medina,* "Influence of angle of incidence on seismic demands for inelastic single-storey structures subjected to bi-directional ground motions", // Eng Struct, vol. 29, no. 10, pp. 2593–2601, 2007.

[5] *A. Ghersi and P.P. Rossi.* Influence of bi-directional ground motions on the inelastic response of one-storey in-plan irregular systems// 1Eng Struct, vol. 23, no. 6, pp. 579–591, 2001.

[6] *S.M. Hussain.* Study on Torsional Effects of Irregular Buildings Under Seismic Loads. vol. 13, no. 7, pp. 55–60, 2018.

[7] *S.E.A. Raheem and M.M. Ahmed*. 2008. "Seismic performance of L-shaped multi-storey buildings with moment-resisting frames". no. July 2018, 2017, doi: 10.1680/jstbu.16.00122.

[8] *Sameh A, El-Betar, 2*. 2008. "Seismic vulnerability evaluation of existing buildings, HBRC Journal Volume 14, 2019 - Issue 2, Pages 189-197, https://doi.org/10.1016/j.hbrcj.2016.09.00

[9] *G.I. Mamatisaev, D.K. Shamsiev, Sh.I. Askarhodjaev , M.Sh. Kurbanbaev , J.A. Yarashov,*. 2023. "To the solution of the problem of longitudinal vibrations of multi-storey buildings on the basis of the plate model" E3S Web of Conferences 402, 07018, (2023). https://doi.org/10.1051/e3sconf/202340207018

[10] *M Mirsaidov and M Usarov*."Bimoment theory construction to assess the stress state of thick orthotropic plates" IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science 614 (2020) 012090//doi:10.1088/1755-1315/614/1/012090

[11] *Usarov, M.K., Usarov, D.M., Isaev, G.U., Kurbanbaev, M.Sh.,Yuldoshev, B.,* .Estimation of seismic resistance of multi-story buildings in the framework of the bimoment theory using the plate model, E3s Web of Conferences, 402, 07017

[12] *Usarov M. K., Askarhodjaev Sh. I., Shamsiev D. K., Usanov F. A.* ."Dynamic Calculation of a Multi-Storey Building under Longitudinal-Shear Vibrations," "Journal of Engineering, Mechanics and Architecture Volume 2, Issue 6, 2024 ISSN (E): 2993-2637.

[13] *Усаров М.К* ."Бимоментная теория изгиба и колебания толстых ортотропных пластин. " IВестник НУ Уз. – № 2/1. –2014. – С.127 – 132.

[14] *Usarov M., Mamatisaev G., J. Yarashov J., Toshmatov E.* "Non-stationary oscillations of a box-like structure of a building " Journal «Modelling and Methods of Structural Analysis», Moscow State University of Civil Engineering/November ,2019. –Pp.130–139..

[15] *Усаров М.К.* "Бимоментная теория толстых анизотропных пластин "Монография – Ташкент: изд-во «Fan ziyosi», 2022. -246 с.

UDC 539.3

SPATIAL MODELS AND METHODS FOR CALCULATING MULTI-STORY BUILDINGS UNDER LONGITUDINAL SEISMIC IMPACTS

Usarov M.K., Isayev G.U., Shamsiyev D.K.

*umakhamatali@mail.ru

Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T.Urazbaev of the Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan.

The article presents a numerical solution to the dynamic problem of longitudinal oscillations of a multi-story building with a spatial foundation based on a spatial continuous plate model developed using the bimoment theory of plates. The expressions for the reduced elasticity and density moduli, as well as the basic longitudinal vibration equations, boundary and contact conditions for a multi-story building, are presented. Numerical results of calculations of displacements and stresses, as well as their maximum values for longitudinal vibrations of multi-story buildings, were obtained.

Keywords: Multi-story building, bimoment theory, plate model, seismic load, longitudinal vibrations, spatial foundation, stresses, displacements, acceleration, equation of motion, boundary conditions, contact conditions.

Citation: Usarov M.K., Isayev G.U., Shamsiyev D.K. 2026. Spatial models and methods for calculating multi-story buildings under longitudinal seismic impacts. *Problems of mechanics.* 1(35): 58-68.

УДК 531.01:629.78

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УЧАСТКОВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ТЯГИ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ГАРФИНКЕЛЯ

Тожиев Р.И, Коршунова Н.А, Рузматов М.И.

*rustamt96@mail.ru, bea40371@rambler.ru, mexanik1123@rambler.ru

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан.

В работе получены аналитические решения задачи оптимизации траекторий космического аппарата в гравитационном поле Гарфинкеля на участках промежуточной тяги. Задача решена на основе вариационного метода Лоудена с минимизацией характеристической скорости при учёте расхода массы и постоянной скорости истечения. Модель Гарфинкеля, учитывающая второй зональный гармонический коэффициент и аппроксимирующая потенциал сплюснутой планеты, позволяет свести интегрирование гамильтоновой системы высокого порядка к квадратурам. С использованием преобразования Леви–Чивиты получены частные аналитические решения для круговых орбит, перпендикулярных оси симметрии планеты, и найдены выражения для тяги и изменения массы аппарата. Полученные решения впервые формируют новый класс аналитических решений для участков промежуточной тяги в задаче минимизации характеристической скорости в потенциале Гарфинкеля. Проведена проверка решений на приоритетность по условию Ляпунова, получены уравнения первого приближения, а также исследована управляемость системы и определены параметры управляемости.

Ключевые слова: осесимметричная планета, вторая зональная гармоника, реактивная сила, множители Лагранжа, базис-вектор, инвариантные соотношения, условию Ляпунова, управляемость системы.

Цитирование: *Тожиев Р.И., Коршунова Н.А., Рузматов М.И.* Аналитические решения для участков промежуточной тяги в гравитационном поле Гарфинкеля // Проблемы механики. – 2026. – №1(35). – С. 69-81.

1 Введение

В настоящее время является актуальной задача определения аналитических решений оптимизации траектории точки переменной массы (центра масс космического аппарата) в гравитационном поле. Вариационная задача, сформулированная Лоуденом [1], предполагает нахождение управляющих параметров (величины и направления реактивной силы), которые обеспечивают переход точки из начального положения в некоторое конечное, минимизируя функционал в форме Майера. Секундный расход массы ограничен, а относительная скорость истечения продуктов сгорания остается постоянной. Несмотря на значительное внимание к этой теме и множество исследований, аналитические решения для вариационной задачи на активных участках в центральных и, особенно, в нецентральных гравитационных полях до сих пор остаются неполностью решеными [2, 3]. Получение аналитических решений позволяет изучать динамику параметров космического аппарата, оценивать точность алгоритмов управления и проверять качество численных расчетов [4]. Подход Лоудена сводит основную часть проблемы к интегрированию замкнутых гамильтоновых систем четырнадцатого порядка на участках нулевой, промежуточной и максимальной

тяг [2, 5]. Это открывает возможность применения инструментов аналитической механики, разработанных для гамильтоновых систем. Данная статья посвящена определению устойчивых аналитических решений для участков промежуточной тяги (ПТ) задачи о минимизации характеристической скорости в случае гравитационного поля Гарфинкеля.

2 Постановка задачи.

Настоящая работа фокусируется на нахождении аналитических решений для гравитационного поля Гарфинкеля [6] на участках промежуточной тяги (ПТ) в задаче минимизации характеристической скорости $J = c \ln \frac{M_0}{M}$ что эквивалентно минимизации расхода массы M .

Дифференциальные уравнения вариационной задачи выглядят следующим образом [1]:

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{cm}{M}\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\lambda} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}), \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}, \quad \dot{M} = -m,$$
$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\boldsymbol{\lambda}_r, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}_r = -\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{r}}\boldsymbol{\lambda}, \quad \dot{\lambda}_M = \frac{cm}{M^2}\lambda, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки (центр масс КА), $\boldsymbol{v}$— её скорость; m — масса точки; c— относительная скорость истечения продуктов сгорания; m — секундный расход массы $(0 \leqslant m \leqslant \bar{m})$; $\boldsymbol{g}$ — гравитационное ускорение; $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}_r, \dot{\lambda}_M$ — множители Лагранжа, сопряженные радиус-вектору, скорости и массе соответственно. В зависимости от модели гравитационного поля, то есть от формы функции $\boldsymbol{g(r)}$, возникают различные сложности при интегрировании уравнений вариационной задачи (1).

Гравитационное поле осесимметричной сфероидальной планеты можно аппроксимировать полем Гарфинкеля, которое частично учитывает влияние второй зональной гармоники. Это приближение отражает основные эффекты несферичности Земли и позволяет интегрировать задачу в квадратурах на пассивных участках методом Якоби. Силовая функция в планетоцентрической экваториальной системе сферических координат r, φ, θ имеет вид [6]:

$$U(r, \theta) = f(r) + \frac{\Phi(\theta)}{r^2}, \tag{2}$$

Здесь функции $f(r)$ и $\Phi(\theta)$ пока считаются произвольными. Промежуточная орбита Гарфинкеля используется в теории движения дальних спутников Земли.

Первую группу дифференциальных уравнений вариационной задачи (1) в сферической системе координат можно переписать в виде:

$$\dot{v}_1 = \frac{cm}{M}\frac{\lambda_1}{\lambda} + \frac{df(r)}{dr} - 2\frac{\Phi(\theta)}{r^3} + \frac{1}{r}(v_2^2 + v_3^2),$$
$$\dot{v}_2 = \frac{cm}{M}\frac{\lambda_2}{\lambda} - \frac{v_1 v_2}{r} + \frac{v_2 v_3}{r}\tan\theta,$$
$$\dot{v}_3 = \frac{cm}{M}\frac{\lambda_3}{\lambda} - \frac{v_1 v_3}{r} - \frac{v_2^2}{r}\tan\theta + \frac{1}{r^3}\frac{d\Phi}{d\theta}, \tag{3}$$
$$\dot{r} = v_1, \quad \dot{\varphi} = \frac{v_2}{r\cos\theta}, \quad \dot{\theta} = \frac{v_3}{r}, \quad \dot{M} = -m,$$

Здесь v_1, v_2, v_3 - составляющие скорости точки в сферической системе координат.

Составим гамильтониан

$$H=\sum_{i=1}^{7}\lambda_i\dot{x}_i=\lambda_1\left(\frac{cm}{M}\frac{\lambda_1}{\lambda}+\frac{df(r)}{dr}-2\frac{\Phi(\theta)}{r^3}+\frac{1}{r}(v_3^2+v_2^2)\right)$$
$$+\lambda_2\left(\frac{cm}{M}\frac{\lambda_2}{\lambda}-\frac{v_1v_2}{r}+\frac{v_2v_3}{r}\tan\theta\right)+$$
$$+\lambda_3\left(\frac{cm}{M}\frac{\lambda_3}{\lambda}-\frac{v_1v_3}{r}-\frac{v_2^2}{r}\tan\theta+\frac{1}{r^3}\frac{d\Phi}{d\theta}\right)+\lambda_4v_1+\lambda_5\frac{v_2}{r\cos\theta}+\lambda_6\frac{v_3}{r}-\lambda_7m, \qquad (4)$$

Тогда дифференциальные уравнения для множителей найдём из условия

$$\dot{\lambda}_i=-\frac{\partial H}{\partial v_i}\quad(i=1,2,3);\quad \dot{\lambda}_4=-\frac{\partial H}{\partial r};\quad \dot{\lambda}_5=-\frac{\partial H}{\partial\varphi};\quad \dot{\lambda}_6=-\frac{\partial H}{\partial\theta};\quad \dot{\lambda}_7=-\frac{\partial H}{\partial M}$$

$$\dot{\lambda}_1=\lambda_2\frac{v_2}{r}+\lambda_3\frac{v_3}{r}-\lambda_4,$$
$$\dot{\lambda}_2=-2\lambda_1\frac{v_2}{r}+\frac{\lambda_2}{r}(v_1-v_3\tan\theta)+2\lambda_3\frac{v_2}{r}\tan\theta-\frac{\lambda_5}{r\cos\theta},$$
$$\dot{\lambda}_3=-2\lambda_1\frac{v_3}{r}-\lambda_2\frac{v_2}{r}\tan\theta+\lambda_3\frac{v_1}{r}-\frac{\lambda_6}{r},$$
$$\dot{\lambda}_4=\lambda_1\left(\frac{(v_2^2+v_3^2)}{r^2}-\frac{\partial^2f(r)}{\partial r^2}-6\frac{\Phi(\theta)}{r^4}\right)+\frac{\lambda_2}{r^2}(v_2v_3\tan\theta-v_1v_2)- \qquad (5)$$
$$-\frac{\lambda_3}{r^2}\left(v_1v_3+v_2^2\tan\theta-\frac{3}{r^2}\frac{d\Phi(\theta)}{d\theta}\right)+\lambda_5\frac{v_2}{r^2\cos\theta}+\lambda_6\frac{v_3}{r^2},$$
$$\dot{\lambda}_5=0,$$
$$\dot{\lambda}_6=+\frac{2\lambda_1}{r^3}\frac{d\Phi}{d\theta}-\lambda_2\frac{v_2v_3}{r\cos^2\theta}-\lambda_3\left(\frac{1}{r^3}\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}-\frac{v_2^2}{r\cos^2\theta}\right)-\lambda_5\frac{v_2\sin\theta}{r\cos^2\theta},$$
$$\dot{\lambda}_7=\frac{cm}{M^2}\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2},$$

3 Определение частных решений

Для дифференциальных уравнений вариационной задачи (1) четырнадцатого порядка на участках ПТ известны только четыре интеграла [2, 5]: интеграл, соответствующий сохранению гамильтониана$\sum\lambda_i\dot{x}_i=h$; интеграл, содержащий массу: $\lambda_7M=c$; интеграл, выражающий постоянство величины базис–вектора $\lambda_1^2+\lambda_2^2+$ $+\lambda_3^2=1$; циклический интеграл:$\lambda_5=a$.

Известных интегралов недостаточно для определения общего решения. Поэтому представляет интерес определение частных решений. Одним из методов нахождения частных решений гамильтоновых систем является метод Леви-Чивита, использующий знание только некоторого числа интегралов, или инвариантных соотношений, находящихся в инволюции. Этот метод добавляет к имеющимся интегралам инвариантные соотношения, позволяющие свести задачу к квадратурам [7, 8].

Поскольку три интеграла $\lambda_5=a,\quad \lambda_7M=c,\quad \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=1$, находятся в инволюции, применяем метод Леви-Чивита. Исключаем из гамильтониана (4) множители $\lambda_5,\lambda_7,\lambda_1$, и обозначаем результат через K.

$$K = S\left(\frac{df(r)}{dr} - 2\frac{\Phi(\theta)}{r^3} + \frac{1}{r}(v_3^2 + v_2^2)\right) + \lambda_2\left(-\frac{v_1 v_2}{r} + \frac{v_2 v_3}{r}\tan\theta\right) +$$
$$+ \lambda_3\left(-\frac{v_1 v_3}{r} - \frac{v_2^2}{r}\tan\theta + \frac{1}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \lambda_4 v_1 + a\frac{v_2}{r\cos\theta} + \lambda_6\frac{v_3}{r},$$

где ($S^2 = 1 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2$)

Составим инвариантные соотношения:

$$\frac{\partial K}{\partial v_2} = 0, \qquad \frac{\partial K}{\partial v_3} = 0,$$
$$\frac{\partial K}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial K}{\partial \theta} = 0,$$
$$\frac{\partial K}{\partial \lambda_2} = 0, \qquad \frac{\partial K}{\partial \lambda_3} = 0,$$
$$\frac{\partial K}{\partial \lambda_4} = 0, \qquad \frac{\partial K}{\partial \lambda_6} = 0,$$

После преобразований получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered} v_1 = 0, \quad v_3 = 0, \quad r = \text{const}, \quad \theta = \text{const}, \\ \lambda_2 = 0, \quad \lambda_6 = 0, \quad \dot{v}_2 = \frac{cm}{M}\lambda_2 = 0, \quad \dot{v}_2 = 0, \quad v_2 = \text{const}, \end{gathered} \tag{6}$$

$$\frac{2Sv_2}{r} - 2\frac{\lambda_3 v_2\tan\theta}{r} + \frac{a}{r\cos\theta} = 0,$$
$$\left(-\frac{v_2^2}{r}\tan\theta + \frac{1}{r^3}\frac{d\Phi}{d\theta}\right) - \frac{\lambda_3}{S}\left(\frac{df(r)}{dr} - 2\frac{\Phi(\theta)}{r^3} + \frac{1}{r}v_2^2\right) = 0,$$
$$S\left(\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + 6\frac{\Phi(\theta)}{r^4} - \frac{1}{r^2}v_2^2\right) + \lambda_3\left(\frac{v_2^2}{r^2}\tan\theta - \frac{3}{r^4}\frac{d\Phi}{d\theta}\right) - a\frac{v_2}{r^2\cos\theta} = 0,$$
$$-\frac{2S}{r^3}\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta} + \lambda_3\left(-\frac{v_2^2}{r\cos^2\theta} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}\right) + a\frac{v_2\sin\theta}{r\cos^2\theta} = 0,$$
$$0 = \frac{cm}{M}S + \frac{df(r)}{dr} - 2\frac{\Phi(\theta)}{r^3} + \frac{1}{r}v_2^2,$$
$$0 = \frac{cm}{M}\lambda_3 - \frac{v_2^2}{r}\tan\theta + \frac{1}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta},$$
$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_4, \tag{7}$$
$$0 = -2\lambda_1\frac{v_2}{r} + 2\lambda_3\frac{v_2}{r}\tan\theta - \frac{a}{r\cos\theta},$$
$$\dot{\lambda}_3 = 0, \quad \Rightarrow \lambda_3 = \text{const},$$
$$\dot{\lambda}_4 = \lambda_1\left(\frac{v_2^2}{r^2} - \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} - 6\frac{\Phi(\theta)}{r^4}\right) - \frac{\lambda_3}{r^2}\left(v_2^2\tan\theta + \frac{3}{r^2}\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta}\right) + a\frac{v_2}{r^2\cos\theta},$$
$$0 = \frac{2\lambda_1}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \lambda_3\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} - \frac{v_2^2}{r\cos^2\theta}\right) - a\frac{v_2\sin\theta}{r\cos^2\theta},$$

Из этой системы получим класс частных решений, которому соответствуют круговые траектории, плоскости которых перпендикулярны оси динамической симметрии

планеты. Участки ПТ являются дугами этих окружностей. По каждой окружности точка движется равномерно со своей скоростью $v_2(\mu,\theta,r)$, которая больше местной круговой и из соотношений (6), (7) получим:

$$v_2=\sqrt{\frac{A'D'-C'B'}{(D'+A'-B'-C')}},$$

$$\begin{aligned}A'&=\left(\frac{d^2f(r)}{dr^2}+6\frac{\Phi(\theta)}{r^4}\right)r^2-\frac{d\Phi(\theta)}{\partial\theta}\frac{2}{r^2\tan\theta},\quad D'=\left(-\frac{df(r)}{dr}+2\frac{\Phi(\theta)}{r^3}\right)r,\\ B'&=\left(\frac{1}{r^4}\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}-\frac{3}{r^4}\frac{d\Phi}{d\theta}\tan\theta\right)r^2,\quad C'=\frac{1}{r^3}\frac{d\Phi}{d\theta}\frac{r}{\tan\theta}.\end{aligned}\tag{8}$$

Найдены зависимости реактивной силы от положения плоскости.

$$\tan\alpha=\frac{\lambda_3}{\lambda_1}=\frac{\frac{v_2^2}{r}\tan\theta-\frac{1}{r^3}\frac{d\Phi}{d\theta}}{-\frac{df(r)}{dr}+2\frac{\Phi(\theta)}{r^3}-\frac{1}{r}v_2^2},\tag{9}$$

Здесь α — угол между силой тяги и радиальным направлением.

Масса изменяется по показательному закону:

$$M=M_0\exp\left(\frac{N}{c\lambda_1}t\right),\quad N=\frac{df(r)}{dr}-2\frac{\Phi(\theta)}{r^3}+\frac{1}{r}v_2^2,\tag{10}$$

Возникает вопрос: какая часть второй зональной гармоники не входит в потенциал Гарфинкеля. В книге [6] приводится значение этой части гамильтониана, которая принята за возмущающую функцию. Тогда невозмущённая часть гамильтониана позволяет найти функции $f(r)$ и $\Phi(\theta)$ для потенциала Гарфинкеля (2).

$$f(r)=\frac{\mu}{r}+\frac{B}{r^2}+\frac{A}{r^3},\quad \Phi(\theta)=C\sin^2\theta,\tag{11}$$

где A,B,C - постоянные величины.

Подставляя значения (11) в (8), получим скорость точки в следующем виде

$$v_2^2=\frac{P(r)+R(r)\sin^2\theta}{Q(r)+W(r)\sin^2\theta},\tag{12}$$

$$\begin{aligned}P(r)&=\frac{\mu^2}{r}+\frac{2\mu}{r^2}(5B-2C)+\frac{2}{r^3}(9\mu A+6B^2-4BC-2C^2)\\&\quad+\frac{6}{r^4}(7AB-2AC)+\frac{36}{r^5}A^2,\\ R(r)&=\frac{14\mu}{r^2}C+\frac{4}{r^3}(8BC+4C^2)+\frac{54}{r^4}AC,\\ Q(r)&=3\mu+\frac{8}{r}(B-C)-\frac{15A}{r^2},\\ W(r)&=\frac{24}{r}C,\end{aligned}$$

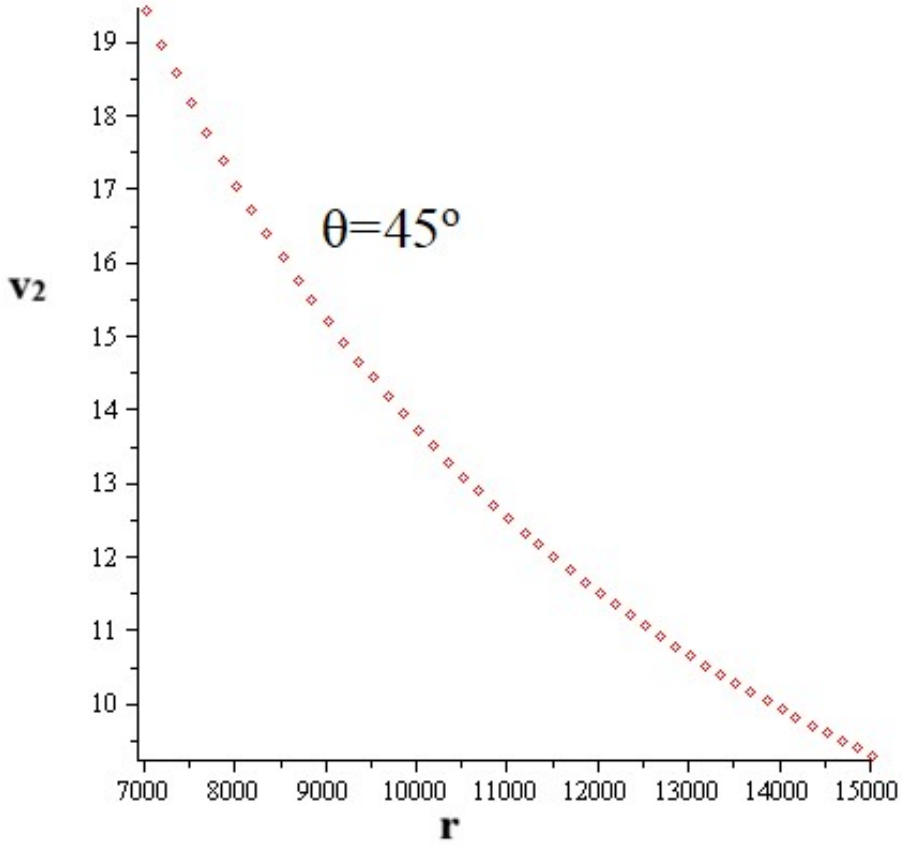


Рис. 1 Изменение величины скорости как функция расстояния.

На рисунке.1 показан график изменения скорости для фиксированного угла тета с радиус-вектором в диапазоне $7000km < r < 15000km$.

Зная скорость, можно определить переменные частного решения по (7)–(12). Таким образом, найдены все переменные:

$$v_1 = 0, v_2^2 = \frac{P(r) + R(r)\sin^2\theta}{Q(r) + W(r)\sin^2\theta}, v_3 = 0,$$

$$r = const, \varphi = \varphi_0 + \frac{v_2}{rcos(\theta)}t, \theta = const, M = M_0 \exp\left(\frac{N}{c\lambda_1}t\right), N = \frac{df(r)}{dr} - 2\frac{\Phi(\theta)}{r^3} + \frac{1}{r}v_2^2,$$

$$\lambda_1 = \sqrt{1-\lambda_3^2}, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \frac{QP + \sqrt{Q^2+1-P^2}}{Q^2+1}, Q = \tan\theta, P = \frac{a}{2v_2\cos\theta} \qquad (13)$$

$$\lambda_4 = 0, \lambda_5 = a, \lambda_6 = 0, \lambda_7 = \frac{c}{M}$$

Теперь найдём функционал : $J = c\ln\frac{M_0}{M} = c\ln\frac{M_0}{M_0\exp\left(\frac{N}{c\lambda_1}t\right)} = \frac{-N}{\lambda_1}t$

Такие траектории полезны как опорные для численного интегрирования и в небесной баллистике.

4 Исследование на устойчивость по первому приближению

Начальное состояние точки может быть реализовано только с какой-то погрешностью, которая со временем может возрастать или убывать. Поэтому необходимо исследовать на устойчивость полученные решения.

Дифференциальные уравнения невозмущенного движения точки запишем в виде

$$\dot{v}_1 = f_1 e_1 + \frac{df(r)}{dr} - 2\frac{\Phi(\theta)}{r^3} + \frac{1}{r}(v_2^2 + v_3^2),$$

$$\dot{v}_2 = f_1 e_2 - \frac{v_1 v_2}{r} + \frac{v_2 v_3}{r}\tan\theta, \tag{14}$$

$$\dot{v}_3 = f_1 e_3 - \frac{v_1 v_3}{r} - \frac{v_2^2}{r}\tan\theta + \frac{1}{r^3}\frac{d\Phi}{d\theta},$$

$$\dot{r} = v_1, \quad \dot{\varphi} = \frac{v_2}{r\cos\theta}, \quad \dot{\theta} = \frac{v_3}{r}, \quad \dot{M} = -m,$$

где $e_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda}$,$e_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda}$,$e_3 = \sqrt{1 - e_1^2 - e_2^2}$; $f_1 = \frac{cm}{M}$ - реактивное ускорение.

В качестве невозмущенного движения, соответствующего рассматриваемому классу частных решений, возьмем следующее:

$$\begin{gathered} v_1^* = 0, v_2^* = v_{20}, v_3^* = 0, r^* = r_0, \\ \varphi^* = \varphi_0 + \beta t, \beta = \frac{v_2}{r\cos\theta}, \theta^* = \theta_0. \end{gathered} \tag{15}$$

В качестве управлений возьмем

$$e_3^* = \lambda_{30}; e_2^* = 0; e_1^* = \sqrt{1 - \lambda_{30}^2}; f_1^* = \frac{cm^*}{M^*} = -\frac{N^*}{\lambda_{10}} > 0 \tag{16}$$

где

$$f_1^* = f_0 = -\frac{N_0}{\lambda_{10}}.$$

Возмущенное движение имеет вид:

$$\begin{cases} v_1 &= x_1; \\ v_2 &= v_{20} + x_2; \\ v_3 &= x_3; \\ r &= r_0 + x_4; \\ \varphi &= \varphi_0 + \beta t + x_5; \\ \theta &= \theta_0 + x_6; \end{cases} \qquad \begin{cases} e_3 &= \lambda_{30} + u_1; \\ e_2 &= u_2; \\ f_1 &= f_0 + u_3. \end{cases} \tag{17}$$

Здесь $x_i (i = 1..6)$– отклонения возмущенного движения от невозмущенного;$u_q (q = = 1, 2, 3)$ (q = 1,2,3) – отклонения управлений сверх программных.

Составим дифференциальные уравнения возмущенного движения в первом приближении

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{2v_{20}}{r_0}x_2 + \left(\left[\frac{\partial}{\partial x_4}\left(\frac{df(r)}{dr}\right)\Big|_{r=r_0+x_4}\right]_0 + 6\frac{\Phi(\theta)}{r_0^4} - \frac{v_{20}^2}{r_0^4}\right)x_4 - \\
&- \frac{2}{r_0^3}\frac{\partial\Phi(\theta_0+x_6)}{\partial x_6}x_6 - 2\frac{f_0\lambda_{30}}{\sqrt{1-\lambda_{30}^2}}u_1 + \sqrt{1-\lambda_{30}^2}u_3 \\
\dot{x}_2 &= f_0u_2 - \frac{v_{20}x_1}{r_0} + \frac{v_{20}}{r_0}\tan\theta x_3, \\
\dot{x}_3 &= f_0u_1 + \lambda_{30}u_3 - 2\frac{v_{20}}{r_0}\tan\theta x_2 + \left(\frac{v_{20}^2}{r_0^2}\tan\theta_0 - \frac{3}{r_0^4}\frac{d\Phi(\theta)}{d\theta}\Big|_{\theta=\theta_0}\right)x_4 + \\
&+ \left(-\frac{v_{20}^2}{r_0\cos^2\theta} + \frac{1}{r_0^3}\frac{\partial}{\partial x_6}(\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta})\Big|_{\theta=\theta_0+x_6}\right)x_6, \\
\dot{x}_4 &= x_1, \\
\dot{x}_5 &= \frac{1}{r_0\cos\theta}x_2 - \frac{v_{20}}{r_0^2\cos\theta}x_4 + \frac{v_0\sin\theta}{r_0\cos^2\theta}x_6, \\
\dot{x}_6 &= -\frac{1}{r_0}x_3.
\end{aligned} \tag{18}$$

Необходимо учитывать условия осуществимости стационарного движения (14),(17):

$$f_1e_1 + \frac{df(r)}{dr} - 2\frac{\Phi(\theta)}{r^3} + \frac{1}{r}(v_2^2) = 0,$$

$$f_1e_3 - \frac{v_2^2}{r}\tan\theta + \frac{1}{r^3}\frac{d\Phi}{d\theta} = 0, \beta = \frac{v_2}{r\cos\theta}$$

Введём обозначения:

$$R = \left[\frac{\partial}{\partial x_4}\left(\frac{df(r)}{dr}\right)\Big|_{r=r_0+x_4}\right]_0 + 6\frac{\Phi(\theta)}{r_0^4} - \frac{v_{20}^2}{r_0^2}, \quad T = \left(\frac{v_{20}^2\tan\theta_0}{r_0^2} - \frac{3}{r_0^4}\frac{d\Phi(\theta)}{d\theta}\Big|_{\theta=\theta_0}\right),$$

$$K_1 = -\frac{v_{20}^2}{r_0\cos^2\theta_0} + \frac{1}{r_0^3}\left(\frac{\partial}{\partial x_6}(\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta})\Big|_{\theta=\theta_0+x_6}\right)_0, \quad A_1 = \left[\frac{\partial\Phi(\theta_0+x_6)}{\partial x_6}\right]_0.$$

Получим уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{2v_{20}}{r_0}x_2 + Rx_4 - \frac{2}{r_0^3}A_1x_6 - 2\frac{f_0\lambda_{30}}{\sqrt{1-\lambda_{30}^2}}u_1 + \sqrt{1-\lambda_{30}^2}u_3 \\
\dot{x}_2 &= f_0u_2 - \frac{v_{20}x_1}{r_0} + \frac{v_{20}}{r_0}\tan\theta x_3, \\
\dot{x}_3 &= f_0u_1 + \lambda_{30}u_3 - 2\frac{v_{20}}{r_0}\tan\theta x_2 + Tx_4 + K_1x_6, \\
\dot{x}_4 &= x_1, \\
\dot{x}_5 &= \frac{1}{r_0\cos\theta}x_2 - \frac{v_{20}}{r_0^2\cos\theta}x_4 + \frac{v_0\sin\theta}{r_0\cos^2\theta}x_6, \\
\dot{x}_6 &= -\frac{1}{r_0}x_3.
\end{aligned} \tag{19}$$

Систему уравнений возмущенного движения запишем в матричной форме

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = W\boldsymbol{x} + B_1\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g}(x,u) \tag{20}$$

Матрицы W и B_1 имеют вид:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2v_{20}}{r_0} & 0 & R & 0 & -\frac{2}{r_0^3}A_1 \\ -\frac{v_{20}}{r_0} & 0 & \frac{v_{20}}{r_0}\tan\theta_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2v_{20}}{r_0}\tan\theta_0 & 0 & T & 0 & K_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_0\cos\theta_0} & 0 & -\frac{v_{20}}{r_0^2\cos\theta_0} & 0 & \frac{v_{20}\sin\theta_0}{r_0\cos^2\theta_0} \\ 0 & 0 & \frac{1}{r_0} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \frac{2f_0\lambda_{30}}{\sqrt{1-\lambda_{30}^2}} & 0 & \sqrt{1-\lambda_{30}^2} \\ 0 & f_0 & 0 \\ f_0 & 0 & \lambda_{30} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

При $u = 0$, имеем задачу об устойчивости по Ляпунову [8] невозмущенного движения $(x_i = 0, i = 1..6)$:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = W\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(x)$$

Составим характеристическое уравнение системы первого приближения $|W - SE| = 0$. Получим,

$$S^6 + S^4\left(-R - \frac{1}{r_0}K_1 + \frac{2v_{20}^2}{r_0^2\cos^2\theta_0}\right) + \\ + S^2\left(\frac{2}{r_0^4}TA_1 + 4\frac{v_{20}^2}{r_0^6}\tan\theta_0 A_1 + \frac{1}{r_0}RK_1 - \frac{2v_{20}^2}{r_0^2}\tan\theta_0 T - \frac{2v_{20}^2}{r_0^3}K_1 - R\frac{2v_{20}^2}{r_0^2}\tan^2\theta\right) = 0$$

Характеристическое уравнение имеет два нулевых корня. Следовательно, если хотя бы один из корней имеет положительную действительную часть, то, по теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению невозмущенное движение, будет неустойчивым. Для этого достаточно, чтобы свободный член характеристического уравнения был отрицательным [8]:

$$S_1 = 0, S_2 = 0$$

Обозначем

$$Y = \frac{2}{r_0^4}TA_1 + 4\frac{v_{20}^2}{r_0^6}\tan\theta_0 A_1 + \frac{1}{r_0}RK_1 - \frac{2v_{20}^2}{r_0^2}\tan\theta_0 T - \frac{2v_{20}^2}{r_0^3}K_1 - R\frac{2v_{20}^2}{r_0^2}\tan^2\theta$$
$$Z = -R - \frac{1}{r_0}K_1 + \frac{2v_{20}^2}{r_0^2\cos^2\theta_0}$$
$$S^2(S^4 + S^2Z + Y) = 0 \tag{22}$$

С учетом обозначений мы определяем область отрицательности функции $Y < 0$. Для этого, используя программу MAPLE, была определена область отрицательности в $Y < 0$ зависимости от угла тета (рис. 2).

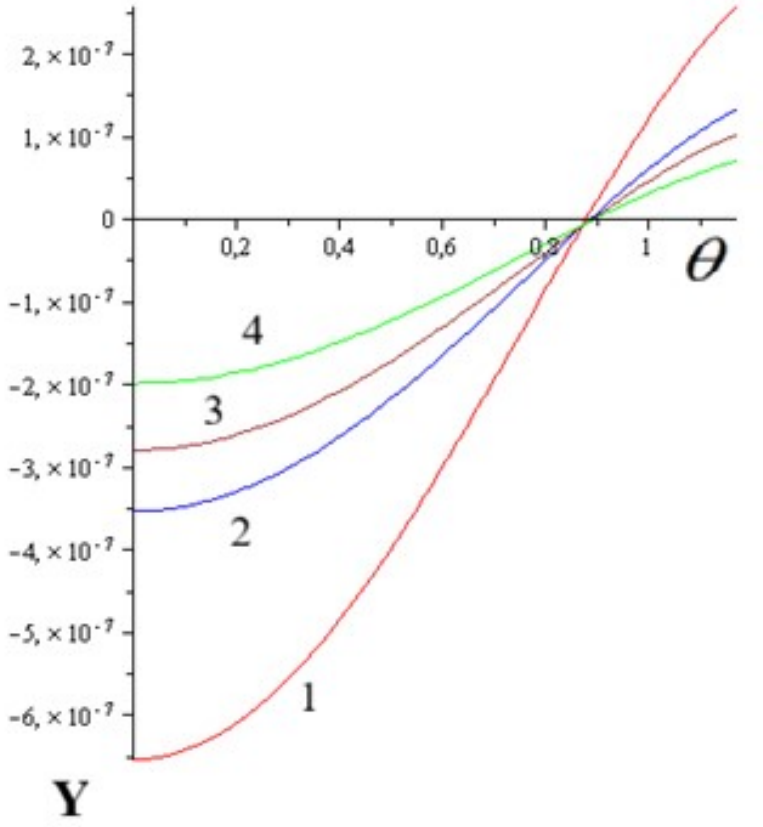


Рис. 2 Область определения отрицательных значений функции Y.

Как видно из графика (рис.2), значения Y отрицательны в диапазоне углов тета $0 < \theta < 0,889$. Это означает, что невозмущенное движение неустойчиво в диапазоне $0 < \theta < 51^o$, а начиная со значений, превышающих угол тета $\theta > 0,889$ или $\theta > 51^o$, невозмущенное движение становится устойчивым.

5 Стабилизация программного движения

Будем стабилизировать невозмущенное движение (14), то есть выберем регулятор $u(t, x)$, при подстановке которого в (21), невозмущенное движение будет асимптотически устойчивым по Ляпунову. Убедимся что система (21) управляема. Ранг матрицы Wравен 6. Следовательно, невозмущенное движение (14) стабилизируется линейным регулятором$\boldsymbol{u} = P\boldsymbol{x}$, независимо от нелинейных членов $\boldsymbol{g}(x, u)$, вопрос о стабилизации решается по линейному приближению [9].

Постоянная вещественная матрица P должна выбираться таким образом, чтобы невозмущённое движение системы

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = (W + B_1P)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(x, u)$$

было асимптотически устойчивым, то есть чтобы вещественные части всех собственных значений матрицы $W+B_1P$ были отрицательными. При этом матрица P должна быть максимально простой. Этому требованию удовлетворяет, например, следующая

матрица [9, 10].

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 & p_{24} & 0 & p_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

то есть $u_1 = 0$,$u_3 = 0$.

Тогда характеристическое уравнение первого приближения будет иметь вид:

$$|W + B_1 P - SE| = 0 \quad \text{или}$$

$$|W + B_1 P - SE| = \begin{vmatrix} -S & \frac{2v_{20}}{r_0} & 0 & R & 0 & -\frac{2}{r_0^3}A_1 \\ -\frac{v_{20}}{r_0} & -S + f_0 p_{22} & \frac{v_{20}}{r_0}\tan\theta_0 & f_0 p_{24} & f_0 p_{25} & 0 \\ 0 & -\frac{2v_{20}}{r_0}\tan\theta_0 & -S & T & 0 & K_1 \\ 1 & 0 & 0 & -S & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_0\cos\theta_0} & 0 & -\frac{v_{20}}{r_0^2\cos\theta_0} & -S & \frac{v_{20}\sin\theta_0}{r_0\cos^2\theta_0} \\ 0 & 0 & \frac{1}{r_0} & 0 & 0 & -S \end{vmatrix} = 0 \tag{24}$$

Получим

$$\begin{aligned} & S^6 - S^5 f_0 p_{22} + S^4\left[\frac{f_0 p_{25}}{r_0\cos\theta_0} - \frac{2v_{20}^2}{r_0^2} - \frac{2v_0^2\tan^2\theta_0}{r_0^2} - R + \frac{K}{r_0}\right] + \\ & + S^3\left[R f_0 p_{22} - \frac{2 f_0 v_0 p_{24}}{r_0} - \frac{K f_0 p_{22}}{r_0}\right] - \\ & - S^2\left(\frac{2v_0^2 K}{r_0^3} + \frac{2v_{20}^2 A\tan\theta_0}{r_0^6} - \frac{K f_0 p_{25}}{r_0^2\cos\theta_0} - \frac{f_0 p_{25} v_{20}^2\sin^2\theta_0}{r_0^3\cos^3\theta_0} + \frac{2Rv_0^2\tan^2\theta_0}{r_0^2} + \right) \\ & \left(+\frac{2v_{20}^2 T\tan\theta_0}{r_0^2} - \frac{R f_0 p_{25}}{r_0\cos\theta_0} + \frac{2 f_0 p_{25} v_{20}^2}{r_0^3\cos\theta_0} - \frac{RK}{r_0} + 2\frac{AT}{r_0^2}\right) + \\ & + S\left[\frac{2 f_0 p_{25} RK}{r_0} - \frac{4Av_{20} f_0 p_{24}\tan\theta_0}{r_0^3} + \frac{2AT f_0 p_{22}}{r_0^2} + \frac{2K v_{20} f_0 p_{24}}{r_0^2}\right] - \\ & - \frac{2AT f_0 p_{25}}{r_0^5\cos\theta_0} - \frac{RK f_0 p_{25}}{r_0^2\cos\theta_0} - \frac{2K f_0 p_{25} A v_{20}^2}{r_0^4\cos\theta_0} - \frac{4 f_0 p_{25} A v_{20}^2\sin\theta_0}{r_0^7\cos^2\theta_0} - \\ & - \frac{2T f_0 p_{25} v_{20}^2\sin\theta_0}{r_0^3\cos^2\theta_0} - \frac{2R f_0 p_{25} v_{20}^2\sin^2\theta_0}{r_0\cos^3\theta_0} = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

Характеристическое уравнение привелось к виду

$$b_0 S^6 + b_1 S^5 + b_2 S^4 + b_3 S^3 + b_4 S^2 + b_5 S^1 + b_6 S^0 = 0 \tag{26}$$

Если, например, кроме $u_1 = 0$ считать $u_2 = 0$ (при $u_3 \neq 0$), то свободный член характеристического уравнения (21) обратится в нуль и один корень этого уравнения станет нулевым.

Условия на параметры определяются из критерия Гурвица [9] для характеристического уравнения системы первого приближения. Следовательно, стабилизирующее управление найдено.

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = p_{22}x_2 + p_{24}x_4 + p_{25}x_5 \\ u_3 = 0 \end{cases} \tag{27}$$

6 Заключение

Рассмотрена вариационная задача о движении точки переменной массы на участках промежуточной тяги в гравитационном поле Гарфинкеля. Дифференциальные уравнения вариационной задачи записаны в сферической системе координат. Показана возможность применения метода Леви–Чивита отыскания частных решений, так как три из известных интегралов для участков промежуточной тяги оказались в инволюции. Следуя методу Леви–Чивита, найден класс частных решений. Найденными участками промежуточной тяги (ПТ) являются дуги окружностей, лежащих в плоскостях, перпендикулярных оси динамической симметрии планеты. Центры окружностей лежат на оси симметрии, радиусы окружностей произвольные. Окружности сплошь покрывают пространство вокруг планеты. По каждой окружности точка движется равномерно со своей постоянной скоростью, зависящей от гравитационного параметра планеты, расстояния до оси симметрии, положения плоскости траектории участка ПТ. Вектор тяги для каждой окружности лежит в плоскости, нормальной к окружности. Найдены все величины, описывающие полученные участки промежуточной тяги как функции, зависящие от начальных условий: траектории, скорость точки, закон изменения реактивной силы по величине (закон изменения массы) и по направлению (тангенс угла между радиальной и трансверсальной составляющими базис–вектора). Для одного из частных решений показано, что оно неустойчиво по Ляпунову, но управляемо по первому приближению, и невозмущенное движение можно стабилизировать линейным регулятором. Построен линейный регулятор, при добавлении которого невозмущенное движение становится асимптотически устойчивым по Ляпунову. Показано, что для стабилизации невозмущенного движения по первому приближению необходимо учитывать возмущения только трех фазовых координат.

Литература

[1] *Лоуден Д.Ф.* Оптимальные траектории для космической навигации. // Москва: Мир, 1966. 152 с..

[2] *Коршунова Н.А., Рузматов М.И.* Аналитические решения задачи оптимизации траекторий в случае гравитационного поля Баррара .// Проблемы механики №2, 2022, с.3-11.

[3] *Azizov A.G., Korshunova N.A.* On an analytical solution of optimum trajectory problem in a gravitational field // Celestial Mechanics. 1986. Vol. 38, No. 4. P. 297-306.

[4] *Azimov Dilmurat M.* // Analytical Solutions for Extremal Space Trajectories. Honolulu: Hawaii, 2016. 381 p.

[5] *Азизов А.Г., Коршунова Н.А.* Вариационные задачи механики космического полета. // Ташкент: ТашГУ, 1992. 84 с.

[6] *Дёмин В.Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. // Москва: Наука, 1968. 352 с..

[7] *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. // Москва: Едиториал УРСС, 2004. 504 с.

[8] *Азизов А.Г., Коршунова Н.А.* Применение метода Леви-Чивита при анализе оптимальных траекторий Космические исследования. 1979. Т. 17, Вып. 3. С. 378-386.

[9] *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. // СПб. Лань, 2003, 304 с.

[10] *Александров В.В., Лемак С.С., Парусников Н.А.* Лекции по механике //

UDC 531.01:629.78

ANALYTICAL SOLUTIONS FOR INTERMEDIATE THRUST ARCS IN THE GARFINKEL GRAVITATIONAL FIELD

Tojiyev R.I., Korshunova N.A., Ruzmatov M.I.

*rustamt96@mail.ru, bea40371@rambler.ru, mexanik1123@rambler.ru

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan.

This paper presents analytical solutions to the problem of optimizing spacecraft trajectories in the Garfinkel gravitational field during intermediate-thrust phases. The problem is addressed using Lawden's variational method with characteristic velocity minimization, taking into account mass variation and a constant exhaust velocity.

The Garfinkel model, which incorporates the second zonal harmonic coefficient and approximates the gravitational potential of an oblate planet, makes it possible to reduce the integration of a high-order Hamiltonian system to quadratures. By applying the Levi-Civita transformation, particular analytical solutions are obtained for circular orbits perpendicular to the planet's axis of symmetry, and explicit expressions for the thrust and spacecraft mass variation are derived. For the first time, these results define a new class of analytical solutions for intermediate-thrust phases in the problem of minimizing characteristic velocity in the Garfinkel potential. The solutions are further validated using the Lyapunov condition for optimality. First-order differential equations are derived, the controllability of the system is analyzed, and the corresponding controllability parameters are determined.

Keywords: axisymmetric planet, second zonal harmonic, reactive force, Lagrange multipliers, basis vector, invariant relations, Lyapunov condition, system controllability.

Citation: Tojiyev R.I., Korshunova N.A., Ruzmatov M.I. 2026. Analytical solutions for intermediate thrust arcs in the Garfinkel gravitational field. *Problems of mechanics.* 1(35): 69-81.

УДК 539.3

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНЫХ НАГРУЗОК В РАМКАХ БИМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ*

Усанов Ф.А.

usanovfurqat94@mail.ru

Институт механики и сейсмостойкости сооружений им.М.Т.Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан.

Аннотация. В статье рассмотрена задача поперечного колебания прямоугольной пластины, со всеми закрепленными сторонами, под действием нормальных нагрузок, приложенных по её лицевой поверхности на основе бимоментной теории пластин. Решение задачи осуществлялось с помощью метода конечных разностей. Приведены численные результаты расчета нормальных перемещений и напряжений пластины, находящейся под действием динамических воздействий для различных размеров пластин.

Ключевые слова: перемещения, напряжения, моменты, бимоменты, бимоментная теория, нормальная нагрузка, уравнения движения, граничные условия, метод конечных разностей.

Цитирование: *Усанов Ф.А.* Поперечные колебания пластины под действием нормальных нагрузок в рамках бимоментной теории // Проблемы механики. – 2026. – № 1(35). – С. 82-94.

1 Введение

Прямоугольные пластины, находят широкое применение в различных областях строительства и промышленности. Расчет пластин на динамические периодические нагрузки с различной частотой, занимает особое место при определении прочности элементов конструкций. В случае совпадения частоты внешних воздействий с собственной частотой колебаний пластины, как известно, наступает явление резонанса, которое может привести к ее разрушению за короткое время. При изменяющейся частоте внешних воздействий важно знать не только частоту первого тона свободных колебаний, но и частоты нескольких последующих обертонов, при которых также может последовать резонанс. Расчет прочности пластины при колебаниях под действием нормальных нагрузок является одной из важнейших задач механики твердого тела. Такие силы могут возникать, например, при контакте пластины с другими сооружениями или с грунтом. Ниже приведен анализ научных исследований по расчету прочности при колебании пластинчатых конструкций.

В работе [1] предложен итерационный метод отыскания собственных частот симметричных колебаний прямоугольной пластины с защемленными противоположными краями с помощью двух гиперболо-тригонометрических рядов по двум координатам. При этом получена разрешающая однородная бесконечная система линейных алгебраических уравнений, которая содержит в качестве параметра искомую собственную частоту. Численные результаты получены для первых трех симметричных собственных форм. Исследована и оценена точность результатов в зависимости от

*Работа выполнена в Институте механики и сейсмостойкости сооружений им.М.Т.Уразбаева АН РУз в рамках бюджетной темы фундаментальных исследований.

количества членов рядов и числа итераций. В [2] предложен точный аналитический способ решения задачи о колебаниях консольной пластины. В качестве примера найдены первые три собственные частоты квадратной пластины при симметричных колебаниях относительно оси, перпендикулярной к заделке, и получены графически соответствующие формы.

В работах [3, 4] построены аналитические выражения для вычисления собственных частот и форм изгибных колебаний защемленных по краям квадратных однородных пластин. Дана оценка их погрешности на основе сопоставления с известными расчетами, полученными резонансным методом и с помощью экспериментальных данных.

При построении теории, гипотезы и допущения, используемые в теории оболочек Кирхгоффа-Лява, обычно приводят к значительным недостаткам и ошибкам [5]. В этих теориях при выводе уравнений колебания неизвестными являются основные компоненты перемещения точек срединной поверхности наполнителя, которых обычно шесть. Если граничные условия сформулированы точно, то число неизвестных увеличивается, и по мнению самих авторов, может достигать двенадцати [6]. В [7] рассмотрена задача об устойчивости анизотропных пластин и оболочек, методы решения которых применимы и для консольных пластин. В [8] рассмотрены динамические характеристики и колебания, различных осесимметричных и плоских конструкций с учетом различной геометрии, пространственных факторов и неупругих свойств материалов.

В [9] рассмотрены основные вопросы определения параметров армирования железобетонных конструкций при их контроле. Анализируются основные пути решения этих проблем. Показаны наиболее надежные и точные методы определения параметров арматуры. В [10] изложены результаты исследований по изгибу пластин с однородными и неоднородными структурами, выполненных в рамках классической и уточненных теорий. В статье [11] приведены вынужденные колебания вязкоупругой трехслойной пластины определенного типа и некоторые задачи с применением численных решений. Реализованы методы, алгоритмы в виде программ для получения резонансных частот и анализа вибраций для прямоугольной вязкоупругой трехслойной пластины. В работе [12] предложена спектральная динамическая модель жесткости для пластинчатых конструкций, усиленных балками. Теория достаточно общая, чтобы пластинчатые конструкции могли подвергаться любым произвольным граничным условиям, но, что важно, ребра жесткости балок могут иметь открытые или закрытые поперечные сечения и могут быть соединены с пластинами с эксцентриситетом или без него.

В работах [13-15] рассматривается разработка теории и метода расчета толстых пластин. Теория и метод были разработаны для оценки напряженно-деформированного состояния толстых пластин без упрощающих гипотез в рамках трехмерной теории упругости. При построении теории учитывались все компоненты деформаций и напряжений, возникающие из-за нелинейности закона распределения перемещений по толщине пластины. Уравнения движения пластины строились относительно сил, моментов и бимоментов. Метод решения основывался на точных выражениях относительно тригонометрических функций.

Исследования в [16, 17] посвящены численному решению задачи о поперечных колебаниях многоэтажного здания в рамках модели сплошной пластины твердой плиты под сейсмическим воздействием. В качестве динамической модели здания предложена консольная анизотропная пластина, теория которой разработана в рамках трех-

мерной динамической теории упругости и учитывает не только структурные силы и моменты, но и бимоменты.

2 Постановка задачи

Предполагаем, что прямоугольная пластина, со всеми закрепленными краями подвергается воздействию нормального нагрузки, приложенной по ее лицевой поверхности. Задача рассматривается в прямоугольной системе координат x_1, x_2 и z. Пусть на лицевой поверхности $z == +h$ пластины действуют внешние распределенные поверхностные нормальные и касательные нагрузки q_1^+, q_2^+, q_3^+ по соответствующим направлениям осей координат. Аналогично к лицевой поверхности $z == -h$ приложены поверхностные нагрузки $q_1^{(-)}, q_2^{(-)}, q_3^{(-)}$ в направлениях координатных осей. Нагрузки $q_1^{(-)}, q_2^{(-)}, q_3^{(-)}$ в направлениях координатных осей.

Введем обозначения: размеры пластины *a, b* в плане, толщина *H=2h*. Для ортотропных тел имеем 9 упругих постоянных. Приведем некоторые сведения из [14] об упругих характеристиках ортотропных материалов. Введем следующие обозначения: E_1, E_2, E_3 – модули упругости; G_{12}, G_{13}, G_{23}, – модули сдвига; $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$, – коэффициенты Пуассона материала пластины. Для трансверсально-изотропного материала число упругих постоянных сокращается до пяти: $E_1 = E_2, E_3, G_{13} = G_{23}, G_{12}, \nu_{13} = \nu_{12}, \nu_{12}$, так как $G_{12} = E_1/(2(1+\nu_{12}))$. Для изотропного материала число упругих постоянных сокращается до двух: $E_1 = E_2 = E_3 = E, G_{13} = G_{23} = G_{12} = G, \nu_{13} = \nu_{12} = nu_{12} = \nu$, так как $G_{13} = G_{23} = G_{12} = G = E/(2(1+\nu))$.

Чтобы определить напряжения через деформации, необходимо найти следующие упругие постоянные $E_1, E_2, ...E_3$, определяемые через коэффициенты Пуассона и модули упругости:

$$\begin{cases} E_{11} = E_1 g_{11}, \quad E_{22} = E_2 g_{22}, \quad E_{33} = E_3 g_{33}, \\ E_{12} = E_{21} = E g_{12} = E_2 g_{21}, \\ E_{13} = E_{31} = E_1 g_{13} = E_3 g_{31}, \quad E_{23} = E_{32} = E_2 g_{23} = E_3 g_{32}, \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} g_{11} = \dfrac{1+\nu_{23}\nu_{32}}{1-\mu^2}, \quad g_{22} = \dfrac{1+\nu_{13}\nu_{31}}{1-\mu^2}, \quad g_{33} = \dfrac{1+\nu_{12}\nu_{21}}{1-\mu^2}, \\ g_{12} = g_{21} = \dfrac{\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{23}}{1-\mu^2} = \dfrac{\nu_{21}+\nu_{21}\nu_{32}}{1-\mu^2}, \\ g_{13} = g_{31} = \dfrac{\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}}{1-\mu^2} = \dfrac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{1-\mu^2}, \\ g_{23} = g_{32} = \dfrac{\nu_{23}+\nu_{13}\nu_{12}}{1-\mu^2} = \dfrac{\nu_{32}+\nu_{31}\nu_{21}}{1-\mu^2}, \\ \mu^2 = \nu_{12}\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{32} + \nu_{13}\nu_{31} + 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}. \end{cases}$$

Пластина рассматривается как трехмерное тело, материал которой подчиняется обобщенному закону Гука. Компоненты вектора перемещения определяются в виде функций трех пространственных координат и времени:

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2, z, t), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2, z, t), \quad u_3 = u_3(x_1, x_2, z, t). \end{cases}$$

Компоненты тензора деформации определяются следующими соотношениями Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = \dfrac{\partial u_3}{\partial z}, \\ \varepsilon_{12} = \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right), \quad \varepsilon_{13} = \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial z} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right), \quad \varepsilon_{23} = \left(\dfrac{\partial u_2}{\partial z} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right), \end{cases}$$

Для ортотропного тела закон Гука (4) запишется в виде:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = E_{11}\varepsilon_{11} + E_{12}\varepsilon_{22} + E_{13}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{22} = E_{21}\varepsilon_{11} + E_{22}\varepsilon_{22} + E_{23}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{33} = E_{31}\varepsilon_{11} + E_{32}\varepsilon_{22} + E_{33}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{12} = G_{12}\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{13} = G_{13}\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = G_{23}\varepsilon_{23}. \end{cases}$$

Бимоментная теория толстых пластин [13-15] разработана с учетом всех компонент тензоров напряжения и деформации $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$. Она учитывает кроме растягивающих и перерезывающих сил, изгибающие и крутящие моменты, а также бимоменты. Бимоментная теория пластин описывается двумя несвязанными задачами, каждая из которых формулируется на основе девяти двумерных уравнений с соответствующими краевыми условиями, которые представляют симметричные и антисимметричные задачи.

Уравнения движений антисимметричной задачи бимоментной теории пластин описывают поперечные изгибно-сдвиговые колебания с учетом поперечного обжатия пластины и представляются моментами, силами и бимоментами. Для представления грузовые члены системы уравнений движения, введем обобщенные нагрузки, определяемые внешними силами в виде:

$$\begin{cases} \widetilde{q}_k = \dfrac{q_k^{(+)} + q_k^{(-)}}{2}, \quad (k = 1, 2) \quad \widetilde{q}_3 = \dfrac{q_3^{(+)} - q_3^{(-)}}{2}. \end{cases}$$

Уравнения движения пластины представляются относительно девяти обобщенных неизвестных функций от двух пространственных координат x_1, x_2 и времени t, и определяются по формулам:

$$\begin{cases} \widetilde{W}_1 = \dfrac{u_3^{(+)} - u_3^{(-)}}{2}, \quad \widetilde{r} = \dfrac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} u_3 z dz, \qquad \widetilde{\gamma} = \dfrac{1}{2h^3}\int\limits_{-h}^{h} u_3 z^2 dz, \\ \widetilde{u}_k = \dfrac{u_k^{(+)} + u_k^{(-)}}{2}, \quad \widetilde{\psi}_k = \dfrac{1}{2h^2}\int\limits_{-h}^{h} u_k z dz, \quad \widetilde{\beta}_k = \dfrac{1}{2h^4}\int\limits_{-h}^{h} u_k z^3 dz, \quad (k = 1, 2). \end{cases}$$

Запишем уравнения движения пластины относительно изгибающих, крутящих моментов и относительно перерезывающих сил [13-15]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_{13} + H\widetilde{q}_1 = \dfrac{H^2}{2}\rho\ddot{\widetilde{\psi}}_1, \\ \dfrac{\partial M_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_{23} + H\widetilde{q}_2 = \dfrac{H^2}{2}\rho\ddot{\widetilde{\psi}}_2, \\ \dfrac{\partial Q_{13}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial Q_{23}}{\partial x_2} + 2\widetilde{q}_3 = H\rho\ddot{\widetilde{r}}. \end{cases} \tag{1}$$

где ρ -плотность материала пластины.

Изгибающие, сдвигающие моменты M_{11}, M_{22}, M_{12} и перерезывающие силы Q_{13}, Q_{23} определяются следующим образом.

Выражения изгибающих и сдвигающих моментов имеют вид:

$$\begin{cases} M_{11} = \int\limits_{-h}^{h} \sigma_{11} z dz = \dfrac{H^2}{2} \left(E_{11} \dfrac{\partial \widetilde{\psi}_1}{\partial x_1} + E_{12} \dfrac{\partial \widetilde{\psi}_2}{\partial x_2} - E_{13} \dfrac{2(\widetilde{r} - \widetilde{W})}{H} \right), \\ M_{22} = \int\limits_{-h}^{h} \sigma_{22} z dz = \dfrac{H^2}{2} \left(E_{12} \dfrac{\partial \widetilde{\psi}_1}{\partial x_1} + E_{22} \dfrac{\partial \widetilde{\psi}_2}{\partial x_2} - E_{23} \dfrac{2(\widetilde{r} - \widetilde{W})}{H} \right), \\ M_{12} = M_{21} = \int\limits_{-h}^{h} \sigma_{12} z dz = G_{12} \dfrac{H^2}{2} \left(\dfrac{\partial \widetilde{\psi}_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \widetilde{\psi}_2}{\partial x_1} \right). \end{cases}$$

Выражения для перерезывающих сил запишутся в виде:

$$\begin{cases} Q_{13} = \int\limits_{-h}^{h} \sigma_{13} z dz = G_{13} \left(2\widetilde{u}_1 + H \dfrac{\partial \widetilde{r}}{\partial x_1} \right), \\ Q_{23} = \int\limits_{-h}^{h} \sigma_{23} z dz = G_{23} \left(2\widetilde{u}_2 + H \dfrac{\partial \widetilde{r}}{\partial x_2} \right). \end{cases}$$

Уравнения относительно бимоментов при изгибе и поперечном сдвиге получаются в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial P_{12}}{\partial x_2} - 3H\widetilde{p}_{13} + H\widetilde{q}_1 = \dfrac{H^2}{2} \rho \ddot{\widetilde{\beta}}_1, \\ \dfrac{\partial P_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial P_{22}}{\partial x_2} - 3H\widetilde{p}_{23} + H\widetilde{q}_2 = \dfrac{H^2}{2} \rho \ddot{\widetilde{\beta}}_2, \\ \dfrac{\partial \widetilde{p}_{13}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \widetilde{p}_{23}}{\partial x_2} - \dfrac{4\widetilde{p}_{33}}{H} + \dfrac{2\widetilde{q}_3}{H} = \rho \ddot{\widetilde{\gamma}}. \end{cases} \tag{2}$$

Бимоменты P_{11}, P_{22} и P_{12} порождаемые при изгибе и сдвиге пластины, определяются по следующим формулам:

$$\begin{cases} P_{11} = \int\limits_{-h}^{h} \sigma_{11} z^3 dz = \dfrac{H^2}{2} \left(E_{11} \dfrac{\partial \widetilde{\beta}_1}{\partial x_1} + E_{12} \dfrac{\partial \widetilde{\beta}_2}{\partial x_2} - E_{13} \dfrac{2(3\widetilde{\gamma} - \widetilde{W})}{H} \right), \\ P_{22} = \dfrac{1}{h^2} \int_{-h}^{h} \sigma_{22} z \, dz = \dfrac{H^2}{2} \left(E_{12} \dfrac{\partial \widetilde{\beta}_1}{\partial x_1} + E_{22} \dfrac{\partial \widetilde{\beta}_2}{\partial x_2} E_{13} \dfrac{2(3\widetilde{\gamma} - \widetilde{W})}{H} \right), \\ P_{12} = P_{21} = \dfrac{1}{h^2} \int_{-h}^{h} \sigma_{12} z \, dz = \dfrac{H^2}{2} A_2 \left(\dfrac{\partial \widetilde{\beta}_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \widetilde{\beta}_2}{\partial x_1} \right). \end{cases}$$

Интенсивности поперечных касательных и нормальных бимоментов $\widetilde{p_1 3}$, $\widetilde{p_2 3}$, и $\widetilde{p_3 3}$ определяются выражениями:

$$\begin{cases} \widetilde{p}_{k3} = G_{k3} \left(\dfrac{2\widetilde{u}_k - 4\widetilde{\psi}_k}{H} + \dfrac{\partial \widetilde{\gamma}}{\partial x_k} \right), \qquad (k = 1, 2), \\ \widetilde{p}_{33} = E_{31} \dfrac{\partial \widetilde{\gamma}_1}{\partial x_1} + E_{32} \dfrac{\partial \widetilde{\gamma}_2}{\partial x_2} - E_{33} \dfrac{2(\widetilde{r} - \widetilde{W})}{H}. \end{cases}$$

Уравнения (1) и (2) образуют взаимосвязанную систему из шести уравнений относительно девяти неизвестных функций $\widetilde{\psi}_1, \widetilde{\psi}_2, \widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{r}, \widetilde{\gamma}, \widetilde{W}$, что недостаточного для однозначного решения поставленной задачи. Для однозначности требуется

ещё три уравнения. Для построения этих недостающих уравнений запишем уравнения движения теории упругости на лицевых поверхностях пластины: $z = +h$ и $z = -h$ а также для аппроксимации членов уравнений $(\partial\sigma_{13}/\partial z), (\partial\sigma_{23}/\partial z)$, и $(\partial\sigma_{33}/\partial z)$, воспользуемся методом разложения компоненты перемещения и напряжения в бесконечный ряд Маклорена [14]. В результате получим три уравнения для задачи об изгибных колебаниях пластин в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\widetilde{\sigma}_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\widetilde{\sigma}_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\widetilde{\sigma}^*_{13}}{H} = \rho\,\ddot{\widetilde{u}}_1, \\ \dfrac{\partial\widetilde{\sigma}_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\widetilde{\sigma}_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\widetilde{\sigma}^*_{23}}{H} = \rho\,\ddot{\widetilde{u}}_2, \\ \dfrac{\partial\widetilde{\sigma}_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\widetilde{\sigma}_{32}}{\partial x_2} + \dfrac{\widetilde{\sigma}^*_{33}}{H} = \rho\,\ddot{\widetilde{W}}. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $\widetilde{\sigma}_{11}, \widetilde{\sigma}_{12}, \widetilde{\sigma}_{22}$, определяются из закона Гука с учетом условий на лицевых поверхностях:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = E^*_{11}\dfrac{\partial\widetilde{u}_1}{\partial x_1} + E^*_{12}\dfrac{\partial\widetilde{u}_2}{\partial x_2} + \dfrac{E_{13}}{E_{33}}\widetilde{q}_3, \\ \sigma_{22} = E^*_{12}\dfrac{\partial\widetilde{u}_1}{\partial x_1} + E^*_{12}\dfrac{\partial\widetilde{u}_2}{\partial x_2} + \dfrac{E_{23}}{E_{33}}\widetilde{q}_3, \\ \sigma_{12} = G_{12}\left(\dfrac{\partial\widetilde{u}_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\widetilde{u}_2}{\partial x_1}\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\widetilde{\sigma}^*_{3k}}{H} = G_{k3}\dfrac{210\left(33\widetilde{\beta}_k - 9\widetilde{\varphi}_k - 4\widetilde{u}_k\right)}{H^2} + G_{k3}\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{\widetilde{q}_3}{E_{33}} - \dfrac{E_{31}}{E_{33}}\dfrac{\partial\widetilde{u}_1}{\partial x_1} - \dfrac{E_{31}}{E_{33}}\dfrac{\partial\widetilde{u}_2}{\partial x_2}\right) + \\ + \dfrac{42}{H}\left(\widetilde{q}_k - G_{k3}\dfrac{\partial\widetilde{W}}{\partial x_k}\right), \qquad (k = 1, 2), \\ \dfrac{\widetilde{\sigma}^*_{33}}{H} = E_{33}\dfrac{210\left(9\widetilde{\gamma} - 2\widetilde{W} - \widetilde{r}\right)}{H^2} + + E_{31}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\widetilde{q}_1}{G_{13}} - \dfrac{\partial\widetilde{W}}{\partial x_1}\right) + \\ + E_{32}\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\widetilde{q}_2}{G_{23}} - \dfrac{\partial\widetilde{W}}{\partial x_2}\right) + \dfrac{30}{H}\left(\widetilde{q}_3 - E_{31}\dfrac{\partial\widetilde{u}_1}{\partial x_1} - E_{32}\dfrac{\partial\widetilde{u}_2}{\partial x_2}\right). \end{cases}$$

Система уравнений (1), (2) и (3) составляет совместную систему относительно девяти неизвестных функций: $\widetilde{\psi}_1, \widetilde{\psi}_2, \widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{r}, \widetilde{\gamma}, \widetilde{W}$.

3 Граничные условия

Считается, что края пластинчатого сооружения $x_1 = 0, x_1 = a, x_2 = 0$ и $x_2 = b$ жестко защемлены. На защемленных краях пластинчатого сооружения должны выполняться условия равенства нулю обобщенных перемещений:

$$\begin{cases} \widetilde{\psi}_1 = 0, \quad \widetilde{\psi}_2 = 0, \quad \widetilde{\beta}_1 = 0, \quad \widetilde{\beta}_2 = 0, \\ \widetilde{r} = 0, \quad \widetilde{\gamma} = 0, \quad \widetilde{u}_1 = 0, \quad \widetilde{u}_2 = 0, \quad \widetilde{W} = 0. \end{cases}$$

Рассматриваются динамические задачи о колебаниях квадратных пластин с защемленными краями в рамках бимоментной теории. В момент времени $t = 0$ начальные условия задачи принимаются нулевыми.

4 Метод решения

С применением конечно-разностного подхода сформирована методика численного динамического моделирования напряжений и перемещений пластины, взаимодействующей с упругим основанием, при различных постановках краевых условий. Значения перемещений во внутренних узлах расчётной области определяются на основе центральных разностных аппроксимаций. Численный алгоритм решения задачи колебаний пластины под действием нормальных нагрузок, как указывалось выше, разработан в рамках метода конечных разностей. Производные перемещений по пространственным координатам аппроксимируются центральными разностными соотношениями. Для вычисления производных напряжений, внутренних усилий, изгибающих моментов и бимоментов используются центральные конечно-разностные схемы, заданные на промежуточных узлах сетки и обеспечивающие второй порядок точности.

Производные от функций обобщенных перемещений в центральной точки разбиения определяем по формулам центральной разности

$$\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x_1}, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta x_1}.\right.$$

При аппроксимации производных от напряжений, сил, моментов и бимоментов используются центральные конечно-разностные схемы на полушагах, которые имеют второй порядок точности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F^k_{i,j}}{\partial x_1} = \dfrac{F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j}}{\Delta x_1}, \\ \dfrac{\partial F^k_{i,j}}{\partial x_2} = \dfrac{F_{i,j+1/2} - F_{i,j-1/2}}{\Delta x_2}, \quad (i = 1,..N, \quad j = 1,..M)\,. \end{cases}$$

Вторую производную функции по времени в рамках метода конечных разностей представим в виде:

$$\left\{\frac{\partial^2 f^k_{i,j}}{\partial x_1^2} = \frac{f^{k+1}_{i,j} - f^k_{i,j} + f^{k-1}_{i,j}}{\Delta t^2},\right.$$

где Δt - шаг по времени.

При реализации численного метода решения поставленной задачи шаги по пространственным координатам и времени выбираем следующим образом:

$$\left\{\Delta x_1 = a/N, \quad \Delta x_2 = b/M, \quad c\Delta t \leqslant \min\left(\Delta x_1, \Delta x_2,\right).\right.$$

Здесь $\Delta x_1 = a/N, \Delta x_2 = b/M$ - шаг вычисления метода сеток.

Реализация вычислительной процедуры для определения перемещений и силовых характеристик пластины выполнена в алгоритмической среде Delphi.

5 Динамический расчет защемленной толстой пластины

В расчетах материал пластины считается изотропным с модулями упругости $E_1 = = E_2 = E_3 = E$ модулями сдвига $G_{12} = G_{13} = G_{23} = E/2(1 + \nu)$ коэффициентами

Пуассона $\nu_{21} = \nu_{23}\nu_{31} = \nu$. Количества деления на сетку равны: $N = M = 20$.

Приведем результаты динамического расчета толстой пластины, находящейся под действием только нормальной распределенной в виде функции Хевисайда динамической нагрузки, приложенной соответственно к лицевой поверхности $z = -h$.

$$\begin{cases} q_1^{(-)} = 0, \quad q_2^{(-)} = 0, \qquad q_3^{(-)} = \begin{cases} 0, & \text{при } t \leqslant 0 \\ -q_0, & \text{при } t > 0. \end{cases} \\ \\ q_1^{(+)} = 0, \quad q_2^{(+)} = 0, \quad q_3^{(+)} = 0, \end{cases}$$

где q_0 - параметр нагрузки, t– время.

Введем безразмерные перемещения пластины по формулам:

$$\left\{ \widetilde{\widetilde{u}}_k = \frac{E\widetilde{u}_k}{Hq_0}, \quad \widetilde{\widetilde{\psi}}_k = \frac{E\widetilde{\psi}_k}{Hq_0}, \quad (k = 1, 2) \quad \widetilde{\widetilde{r}} = \frac{E\widetilde{r}}{Hq_0}. \right.$$

Безразмерные напряжения введем по формулам

$$\left\{ \widetilde{\widetilde{\sigma}}_{11} = \frac{\widetilde{\sigma}_{11}}{q_0}, \quad \widetilde{\widetilde{\sigma}}_{22} = \frac{\widetilde{\sigma}_{22}}{q_0}. \right.$$

Приводим результаты расчетов для квадратной изотропной пластины. Расчеты показали, что формы изгибов обобщенных перемещений $\widetilde{\widetilde{u}}_1, \widetilde{\widetilde{\psi}}_1, \widetilde{\widetilde{\beta}}_1$, – асимметричные, а формы изгибов обобщенных перемещений $\widetilde{\widetilde{u}}_2, \widetilde{\widetilde{\psi}}_2, \widetilde{\widetilde{r}}, \widetilde{\widetilde{\gamma}}, \widetilde{\widetilde{W}}$, – симметричные, эпюры напряжений – асимметричные, а эпюры напряжений, $\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{11}, \widetilde{\widetilde{\sigma}}_{22}$ – симметричные.

На рисунках 1 и 2 приведены графики изменения безразмерных значений перемещений $\widetilde{\widetilde{\psi}}_1$, and $\widetilde{\widetilde{r}}$ по времени t для пластин с размерами $a = b = 10$ м, и $H = 1$ м.

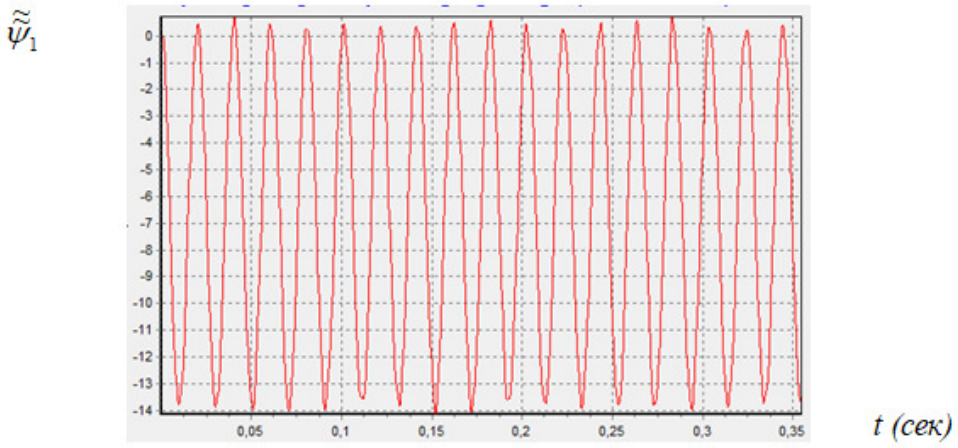


Рис. 1 График безразмерные обобщенные перемещения $\widetilde{\widetilde{r}}$ по времени t для пластин с размерами $a = b = 10$ м, и $H = 1$ м.

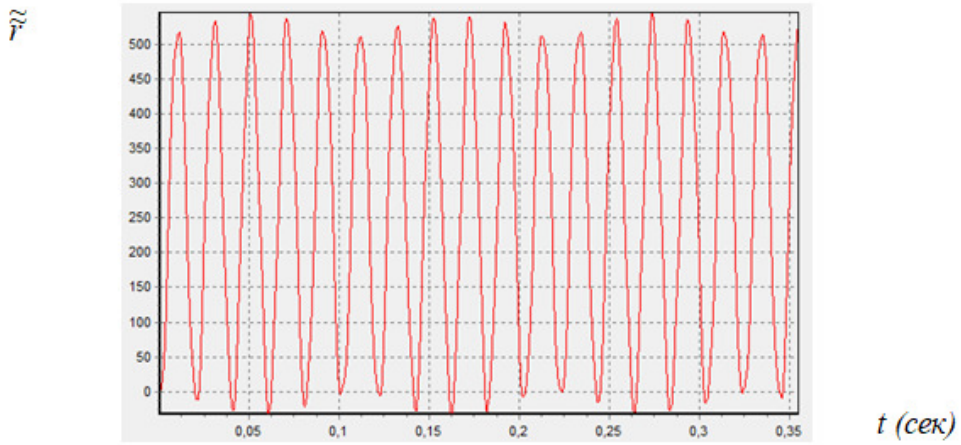


Рис. 2 График безразмерные обобщенные перемещения $\widetilde{\widetilde{r}}$ по времени t для пластин с размерами $a = b = 10$ м, и $H = 1$ м.

На рисунке 3 показаны формы колебаний безразмерные обобщенные перемещения $\widetilde{\widetilde{\psi}}_1$, and $\widetilde{\widetilde{r}}$ в размере пластину $a = b = 10$ м, и $H = 1$ м.

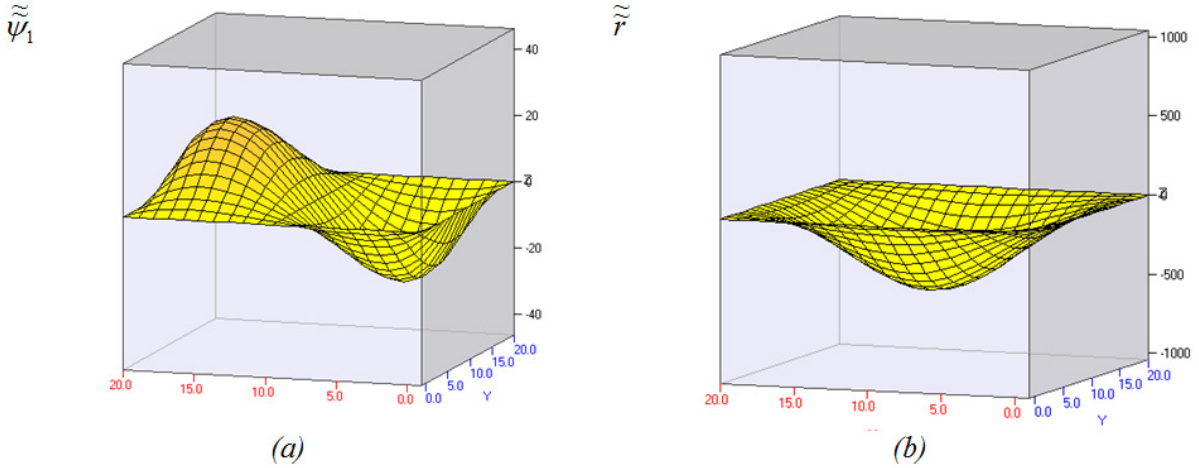


Рис. 3 Формы колебаний безразмерные обобщенные перемещения $\widetilde{\psi}_1(a)$ и обобщенного поперечного перемещения $\widetilde{r}(b)$ в размере пластину $a = b = 10$ м, и $H = 1$ м.

В таблице 1 приведены максимальные значения безразмерные обобщенные перемещений квадратной изотропной пластины $a = b$, для четырёх вариантов отношения H/a.

Таблица 1 Максимальные значения безразмерные обобщенные перемещений, квадратной изотропной пластины $a = b$, для четырёх вариантов отношения H/a.

H/a	(x_1, x_2)	$\widetilde{\widetilde{r}}$	(x_1, x_2)	$\widetilde{\widetilde{u}}_1$	$\widetilde{\widetilde{\psi}}_1$
1/5	$x_1 = \frac{a}{2}$,	12,897	$x_1 = \frac{a}{4}$,	1,916	0,554
1/5		55,641		7,095	2,218
1/7	$x_2 = \frac{b}{2}$	164,395	$x_2 = \frac{b}{4}$	16,587	5,446
1/10		516,420		42,022	13,797

На рисунках 4 и 5 показаны график изменения безразмерных напряжений $\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{11}$ и $\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{22}$ по времени, для пластины размерами $a = b = 10$ м и $H = 1$ м.

Максимальные значения напряжения, обнаружены в точке $(x_1 = a/2, x_2 = 0, z = -h)$ и получились равными $\sigma_{11} = 59,691q_0, \quad \sigma_{22} = 14,962q_0$. А, в точке $(x_1 = 0, x_2 = b/2, z = -h)$ получились равными $\sigma_{11} = 14,962q_0, \quad \sigma_{22} = 59,691q_0$.

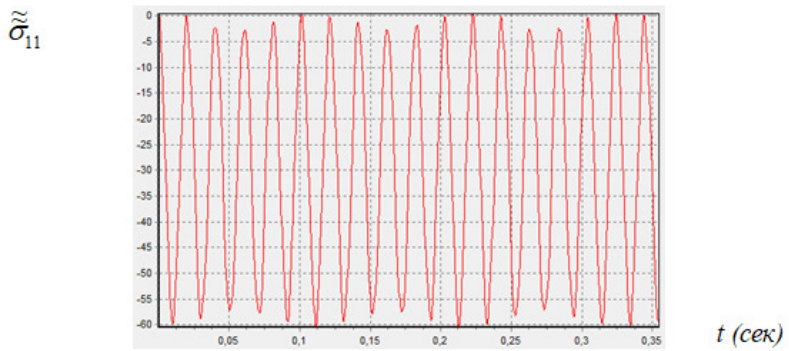


Рис. 4 График $\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{11}$ для пластины размерами $a = b = 10$ м и $H = 1$ м.

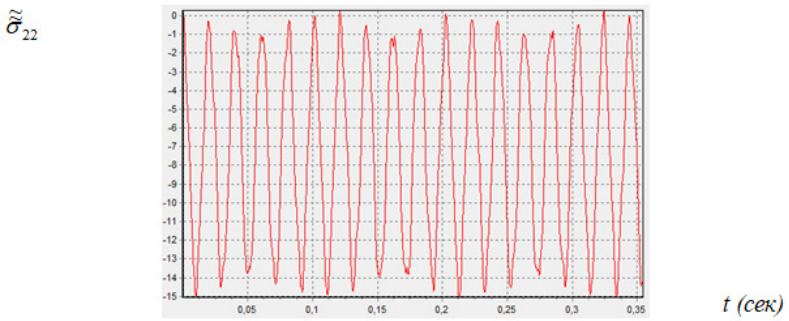


Рис. 5 График $\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{22}$ для пластины размерами $a = b = 10$ м и $H = 1$ м.

На рисунке 6 показаны формы колебаний безразмерного напряжений $\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{11}$ и $\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{22}$ в координатах x_1, x_2, z в размере пластину $a = b = 10$ м и $H = 1$ м.

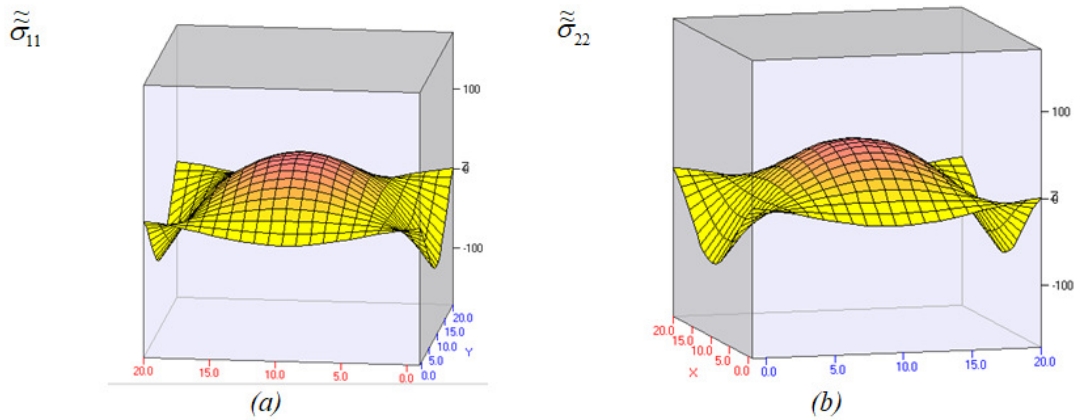


Рис. 6 Формы колебаний безразмерного напряжений $\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{11}, (a)$ и $\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{22}, (b)$ в координатах x_1, x_2, z в размере пластину $a = b = 10$ м и $H = 1$ м.

В таблице 2 представлены результаты расчетов нормальные безразмерного напряжений $\widetilde{\widetilde{\sigma}}_1 1$ и $\widetilde{\widetilde{\sigma}}_2 2$ квадратной изотропной пластины $a = b$ для четырех вариантов значений отношения H/a.

Таблица 2 Численные значения напряжений $\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{11}$ и $\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{22}$ квадратной изотропной пластины $a = b$, для четырёх вариантов отношения H/a.

H/a	(x_1, x_2)	$\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{11}$	$\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{22}$
1/3	$(x_1 = 0,\ x_2 = b/2)$	7,542	1,726
	$(x_1 = a/2,\ x_2 = 0)$	1,726	7,542
1/5	$(x_1 = 0,\ x_2 = b/2)$	17,809	3,744
	$(x_1 = a/2,\ x_2 = 0)$	3,744	17,809
1/7	$(x_1 = 0,\ x_2 = b/2)$	33,030	7,718
	$(x_1 = a/2,\ x_2 = 0)$	7,718	33,030
1/10	$(x_1 = 0,\ x_2 = b/2)$	59,691	14,962
	$(x_1 = a/2,\ x_2 = 0)$	14,962	59,691

6 Заключение

На основе проведенных исследований представлены следующие выводы:

Сформулирована динамическая задач на основе бимоментной теории пластин при вынужденных колебаниях под действием касательных и нормальных внешних нагрузок и граничных условий. Предложена методика расчета на прочность прямоугольных пластин при вынужденных колебаниях под действием касательных и нормальных внешних нагрузок.

Произведена дискретизация уравнений движения толстых пластин с использованием явной схемы метода конечных разностей. Разработан метод численного решения задач изгиба и колебаний толстых пластин под действием динамической нестационарной нагрузки в виде функции Хевисайда для закрепленных граничных условий.

Разработан методика, алгоритм и программа динамического расчета толстых пластин с закрепленными краями на основе метода конечных разностей. Получены численные результаты перемещений, напряжений и определены их максимальные значения.

Литература

[1] *Сухотерин М. В., Лалин В. В., Кондратьева Л. Н., Барышников С. О., Войтко И. В.* Свободные колебания прямоугольной пластины с защемленными противоположными краями (CFCF-пластина) // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки., 2014. Т. 16. № 1. С. 51-64.

[2] *Сухотерин М.В.* Изгибные колебания квадратной пластины, защемленной по контуру // Строительная механика и расчет сооружений, 2014. Т. 2. № 253. С. 26-30.

[3] *Нестеров С.В.* Собственные колебания прямоугольной консольной пластины // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, 2011. Т. 2. № 6. С. 159-165.

[4] *Нестеров С. В.* Высокоточное аналитическое решение задачи об изгибных колебаниях защемленной квадратной пластины // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, 2016. Т. 11. № 6. С. 67-74.

[5] *Kh. Kh. Khudoynazarov, R.I. Khalmuradov, B.F. Yalgashev,* Longitudinal-radial vibrations of a elastic cylindrical shell filled with a viscous compressible liquid // Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh, 2021. № 69. P. 139–154.

[6] *Safarov, I.I., Teshayev, M.K., Boltayev, Z.I. and Akhmedov, M.S,* Damping Properties of Vibrations of Three-Layer Viscoelastic Plate. // International Journal of Theoretical and Applied Mathematics, 2017. №3. P. 191–198.

[7] *Ullah S., Zhou J., Zhang J., Zhou C., Wang H., Zhong Y., Wang B., Li R.* New analytic shear buckling solution of clamped rectangular plates by a two-dimensional generalized finite integral trans-form method. // International Journal of Structur-al Stability and Dynamics, 2020. V. 20. №2. P. 2071002. doi: http://dx.doi.org/10.3103/S0025654410040035

[8] *X.T. Guo, W. Zhang, Y.F. Zhang,* Snap-through and nonlinear oscillations of bistable asymmetric FCSS composite laminated square plate subjected to excitation: Theoretical, numerical and experimental researches. // Journal of Thin-Walled Structures,, 2022. V. 179., 109669. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2022.109669

[9] *A. Ivantsov, T. Lyubimova, G.Khilko, D.Lyubimov,* The Shape of a Compressible Drop on a Vibrating Solid Plate. // Journal of Mathematics,, 2023. V. 11., 4547. doi: http://dx.doi.org/10.3390/math11214527

Янковский А.П. Изгиб равнонапряженно-армированных пластин с учетом их ослабленного сопротивления поперечному сдвигу // Прикладная механика и техническая физика, 2017. Т. 58. №1(341). С. 199-209.

[10] *Мирзакабилов Х.Н.* Методы расчета колебаний вязкоупругой многослойной (трехслойной) пластины // Universum: технические науки, 2024. Vol. 7,. URL: https://7universum.com/ru/tech/archive/item/18008.

[11] *Xiang Liu, Yu Li, Yuliang Lin, J.R.* Banerjee, Spectral dynamic stiffness theory for free vibration analysis of plate structures stiffened by beams with arbitrary cross-sections. // Thin-Walled Structures, 2021. V. 160., 107391. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2020.107391

[12] *Shitikova M., Krusser A.,* Force driven vibrations of nonlinear plates on a viscoelastic Winkler foundation under the harmonic moving load // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2021. V. 17. №4. P. 161–180. doi: http://dx.doi.org/10.22337/2587-9618-2021-17-4-161-180.

[13] *Usarov M.K.* Buckling of orthotropic plates with bimoments // Magazine of Civil Engineering, 2015. Т. 53. №1. P. 80-90. doi: http://dx.doi.org/10.5862/MCE.53.8.

[14] *Усаров М.К.* Бимоментная теория толстых анизотропных пластин / Пер. с англ. — Монография – Ташкент: изд-во «Fan ziyosi», 2022. 246 с. (*Usarov M.K.* Bimoment theory of thick anisotropic plates. — Monograph – Tashkent: publishing house “Fan ziyosi”, 2022. 246 p.)

[15] *Mirsaidov M., Usarov M.* Bimoment theory construction to assess the stress state of thick orthotropic plates // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 2020. №53(1). 012090. doi: http://dx.doi.org/10.1088/1755-1215/614/1/012090.

[16] *Usarov M., Usanov F.* On solution of the problem of bending and vibrations of thick plates on the basis of the bimoment theory // International Conference on Actual Problems of Applied Mechanics, AIP Conference Proceedings 2637, edited by F. Tangreti (AIP Publishing, Samarkand, 2022), 0118598.

[17] *M. Usarov, D. Usarov and G. Mamatisaev,* Calculation of a Spatial Model of a Box-Type Structure in the LIRA Design System Using the Finite Difference Method. // XV International Online Conference Improving Farming Productivity And Agroecology–Ecosystem Restoration-2023, E3S Web of Conferences 403, edited by R. Bennacer (EDP Sciences, Tashkent, 2023), pp.1267–1275.

UDC 539.3

TRANSVERSE OSCILLATIONS OF A PLATE UNDER NORMAL LOADS WITHIN THE FRAMEWORK OF BIMOMENT THEORY*

Usanov F. A.

usanovfurqat94@mail.ru

Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T. Urazbaev, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

Abstract. This article examines the transverse vibration of a rectangular plate, with all sides fixed, under normal loads applied to its face using bimoment plate theory. The problem was solved using the finite difference method. For plates of various sizes, the normal displacement and stresses of the plate under static influences are numerically calculated, and the results are presented.

Keywords: displacements, stresses, moments, bimoments, bimoment theory, normal load, equations of motion, boundary conditions, finite difference method.

Citation: Usanov F. A. 2026. Transverse oscillations of a plate under normal loads within the framework of bimoment theory. *Problems of mechanics.* 1(35): 82-94.

*The work was carried out at the Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T. Urazbaev, Uzbekistan Academy of Sciences, within the framework of the budget theme of fundamental research.

УДК 532

ЭФФЕКТИВНОСТЬ РЕБРА, ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ОБРАЗУЮЩЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КАНАЛА

[1*] ***Эргашев Д.Й.,*** [1] ***Хужаев И.К.,*** [2] ***Хужаев Ж.И.***

[*]dilshod77m@gmail.com

[1]Институт механики и сейсмостойкости сооружений им.М.Т.Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан

[1]Алмалыкский государственный технический институт, Алмалык, Узбекистан

[2]Сингапурский институт развития менеджмента в Ташкенте, Ташкент, Узбекистан

В работе исследуется эффективность цилиндрического трубопровода-теплообменника при оребрении ребрами, параллельными образующей цилиндрической поверхности. Эффективность оребрения определена как отношение интенсивности теплоотдачи от оребренной поверхности к интенсивности теплоотдачи цилиндрической поверхности без ребра при одинаковых условиях эксплуатации теплообменника. На основе уравнений теплового баланса получены аналитические выражения для изменения температуры по высоте ребра и интенсивности теплоотдачи от поверхности цилиндрического канала с ребром с учетом теплообмена через боковые и торцевые поверхности ребра и без ребра. На основе квазиодномерного подхода доказан экспоненциальный закон путевого изменения температуры жидкого теплоносителя по длине оребренному п ребрами в форму прямого параллелепипеда цилиндрического трубпровода-теплообменника. Представлены результаты численных расчетов по эффективности оребрения и по путевому изменению температуры теплоносителя. Полученные результаты могут быть использованы при инженерном проектировании теплообменных аппаратов и систем отопления для выбора рациональных геометрических параметров оребрения и обеспечения заданной кратности увеличения интенсивности теплоотдачи.

Ключевые слова: цилиндрический канал, оребрение, геометрические параметры ребра, тепловой баланс, эффективность теплообмена, интенсивность теплоотдачи, формула Шухова, системы водяного отопления.

Цитирование: *Эргашев Д.Й., Хужаев И.К., Хужаев Ж.И.* Эффективность ребра, параллельного образующей цилиндрического канала // Проблемы механики. – 2026. – №1(35). – С. 95-104.

1 Введение

Теория тепло- и массообмена формировалась долгие века и включают в себя основных положений аэро-, гидро- и термодинамики, теплообмена и массообмена. Состояние теории тепло- и массообмена представлено в книгах [1, 2]. Широкое представление положений теории тепло- и массообмена в учебных материалах [3–10] свидетельствует о практической значимости их.

Теория тепломассообмена – наука о переносе субстанций (в данном случае – массы, импульса и тепла) и обусловленные им изменения в открытых и закрытых системах, в частности, изучает процессы распространения теплоты в твердых, жидких и газообразных телах.

Перенос теплоты (количества тепла), мерой которой является температура, в простом варианте может происходить тремя способами: теплопроводностью, конвекцией и излучением (радиацией).

Процесс переноса теплоты теплопроводностью происходит при непосредственном контакте тел или частицами тел с различными температурами и представляет собой молекулярный процесс передачи теплоты. При нагревании тела кинетическая энергия его молекул возрастает, и частицы более нагретой части тела, сталкиваясь с соседними молекулами, сообщают им часть своей кинетической энергии.

Перенос тепла конвективным способом учитывает текучесть теплопроводной среды (жидкости, газа...) и поле гидродинамических скоростей потока. Гидродинамическое поле скоростей могут быть задан приближенно (с осредненными показателями), или определяться из решения уравнений Навье-Стокса для ламинарного или турбулентных режимов течения.

Третий способ передачи теплоты – внутренней энергии тела в виде электромагнитных волн называется излучением (радиацией). Этот процесс происходит в три стадии: превращение части внутренней энергии одного тела в энергию электромагнитных волн, распространение электромагнитных волн в пространстве, поглощение энергии излучения другим телом. Совместный теплообмен излучением и теплопроводностью называют радиационно-кондуктивным теплообменом. Можно отметить варианты прозрачной (когда излучение проходит через среду без потери энергии) и непрозрачной (когда определенная часть энергии излучения поглощается) сред. При проектировании процессов теплообмена с излучением необходимо учитывать преломления и отражения излучения на границах сред с разной оптической плотностью, явлений дифракции и интерференции в рамках электромагнитных волн.

Совокупность всех видов теплообмена называется сложным теплообменом. Математические модели сложного теплообмена построены с привлечением классической гипотезы Фурье, где плотность потока тепла пропорциональна градиенту температуры и коэффициент пропорциональности называется коэффициентом теплопроводности [3, 4, 7]. Предложена также обобщенная формула Фурье, в частности, зависимость $-q = \lambda\, grad T + \tau_r \frac{\partial q}{\partial \tau}$, где $\tau_r = a^2/\vartheta^2$ – время релаксации; ϑ – скорость изменения теплового потока [11]. Модели на основе обобщенной модели Фурье применяются для описания быстротекущих процессов теплопередачи, когда наблюдаются серьёзные отклонения от классической гипотезы Фурье.

Разработаны различные аналитические [13, 14] и численные методы [15, 16] решения задач теории теплопередачи в простых и сложных объектах. В числа последних входят объекты отопительных систем отдельного производственного или жилого помещения (например, отдельный теплообменник в виде радиатора или калорифера...) и населенных пунктов со своими источниками тепла и теплоносителя. Математическое моделирование таких объектов осуществляется на основе теории потокораспределения [17–19].

Теория потокораспределения опирается на элементы теории тепломассообмена, теории графов и теории управления сложными системами.

Основными элементами теории потокораспределения являются дуги (трубопроводы) и узлы (источники и стоки теплоносителя, источники тепла, точки распределения или слияния потоков, арматура управления и другие) рассматриваемой сети. При построении математической модели сети пользуются аналогами первого и второго законов Кирхгофа, которые обеспечивают реализации законов сохранения массы и теплоты.

Расчет сложной сети трубопроводов производится в рамках квазиодномерного подхода. Изменения показателей теплоносителя по длине дуги-трубопровода описываются в зависимости от гидродинамического режима течения и теплофизических

показателей рабочей жидкости, трубопровода и окружающей среды. В результате математического моделирования образуется система из большого числа нелинейных алгебраических уравнений, для решения которых разработаны различные численные способы решения задачи теории потокораспределения (методы Лобачева-Кросса, Выханду и др.) [17–20], которые используются в процессах проектирования, мониторинга деятельности сложных, закольцованных сетей отопления с наложением условий оптимальности и управления.

Подходы теории потокораспределения с успехом можно использовать при оптимизации работы теплообменников [20, 21].

Увеличение эффективности теплообменных аппаратов является одной из актуальных задач современной теплоэнергетики, машиностроения и систем отопления. В условиях роста энергетических затрат и необходимости рационального использования тепловых ресурсов особое внимание уделяется конструктивным методам интенсификации теплоотдачи без существенного усложнения технологических процессов и увеличения габаритов оборудования. Одним из наиболее распространённых и эффективных способов увеличения интенсивности теплообмена является оребрение теплообменных поверхностей.

Оребрение цилиндрических каналов и трубопроводов широко применяется в теплообменниках, радиаторах, отопительных системах, электрических приборах и устройствах охлаждения. Использование ребер позволяет значительно увеличить площадь теплообмена и, как следствие, повысить тепловую мощность аппарата. Однако эффективность оребрения в существенной степени зависит от геометрических параметров ребер, таких как их высота, толщина, длина и количество, а также от условий теплообмена с окружающей средой. Нерациональный выбор этих параметров может привести к снижению общей эффективности теплообменника и неоправданным материальным затратам.

Несмотря на наличие большого количества исследований [13, 14], посвящённых оребрённым поверхностям, вопросы количественной оценки эффективности ребер, расположенных параллельно образующей цилиндрического канала, а также влияние числа ребер на суммарную интенсивность теплоотдачи остаются недостаточно изученными. В частности, представляет интерес анализ областей параметров, при которых применение ребер является неэффективным, а также выявление закономерностей нелинейного роста теплоотдачи при увеличении количества оребряющих элементов.

В связи с этим в настоящей работе рассматривается задача определения эффективности оребрения цилиндрического канала с ребрами, параллельными его образующей. На основе уравнений теплового баланса получены аналитические выражения для интенсивности теплоотдачи от гладкой и оребренной поверхностей и путевого изменения температуры теплоносителя. Проведён расчётный и графический анализ влияния геометрических параметров ребер и их количества на эффективность теплообменника. Особое внимание уделено практическим аспектам проектирования отопительных систем, в том числе решению обратной задачи по обеспечению заданной кратности увеличения интенсивности теплоотдачи.

2 Эффективность оребрения цилиндрического теплообменника прямоугольными ребрами

Эффективность оребрения определяется как отношение величины теплоотдачи от оребренной поверхности к величине теплоотдачи той же поверхности без ребра.

В целях оценки эффективности ребра разработана математическая модель процесса теплопередачи по сечению ребра.

Рассматривается продольное тонкостенное ребро с длиной l и толщиной 2δ. При формулировании и решении задачи исходили из квазиодномерного подхода, полагая толщина пластины, из чего изготовлено ребро, намного меньше диаметра трубы $2\delta << D$, длины ребра $2\delta << l$ и его высоты $2\delta << H$. Толщина трубопровода составляет δ_T. Температура теплоносителя составляет $T_{жс}$, а температура окружающей среды – $T_{ос}$. Коэффициент теплопроводности материала трубопровода имеет значение λ, коэффициент теплоотдачи от жидкого теплоносителя ребро составляет α_1, коэффициент теплоотдачи от ребра в окружающую среду – α. Вводится ось координат z, которая начинается от уровня контакта жидкость – ребро и кончается на уровне контакта ребро – окружающая среда. Температуру в сечении z обозначим через $T(z)$.

Составлена математическая модель задачи

$$z = 0: \quad -\lambda \frac{dT(0)}{dz} = \alpha_1 \left[T_{жс} - T(0)\right],$$
$$0 < z < H: \quad \frac{d^2T(z)}{dz^2} = \frac{\alpha}{\lambda\delta}\left[T(z) - T_{ос}\right],$$
$$z = H: \quad \lambda \frac{dT(H)}{dz} = -\alpha\left[T(H) - T_{ос}\right].$$

Здесь пользовались обозначениями $k_1 = \frac{\alpha_1}{\lambda}$, $k_2 = \frac{\alpha}{\lambda}$, $m = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda\delta}}$.

Получено решение данной задачи в виде

$$T(z) = \frac{k_1\left(T_{ос} - T_{жсj}\right)}{(m-k_1)(m-k_2)e^{-2mH} - (m+k_1)(m+k_2)} \times$$
$$\times \left[(m-k_2)e^{-2mH}e^{mz} + (m+k_2)e^{-mz}\right] + T_{ос}.$$

Общая интенсивность теплоотдачи от одного ребра определена в виде:

$$Q_{p1} = 2\alpha l A\left[\frac{m-k_2}{m}\left(e^{-mH} - e^{-2mH}\right) - \frac{m+k_2}{m}\left(e^{-mH} - 1\right) + 4\delta m e^{-mH}\right].$$

Здесь использовали обозначение постоянную:

$$A = \frac{k_1(T_{ос} - T_{жс})}{(m-k_1)(m-k_2)e^{-2mH} - (m+k_1)(m+k_2)}.$$

Последние формулы относятся к длине оребренного участка l. А общая длина теплообменника составляет L.

Для вычисления эффективности оребрения нам необходимы значения интенсивности теплоотдачи теплообменника без ребра и интенсивности теплоотдачи от наружной поверхности цилиндрического канала без ребра.

Интенсивность теплоотдачи через цилиндрического поверхность без ребра, согласно уравнению баланса тепла, составляет

$$Q_T = \alpha\pi\left(D + 2\delta_T\right)L(T_j - T_{ос}),$$

где общая наружная поверхность цилиндрического канала – теплообменника составляет $s_L = \pi\left(D + 2\delta_T\right)L$.

Площадь основания ребра принимается приближенно $s_1 = 2\delta l$. В связи с этим площадь свободной от n ребра наружной поверхности участка трубопровода с длиной L составляет:

$$s_{2(n)} = \pi(D + 2\delta_T)L - 2n\delta l.$$

Интенсивность теплоотдачи через данную поверхность составляет

$$Q_{2(n)} = [\pi(D + 2\delta_T)L - 2n\delta l]\,(T_{ж} - T_{ос})\,.$$

Согласно [13], эффективность n ребра составляет

$$\xi_n = \frac{nQ_{p1} + Q_{2(n)}}{Q_T}.$$

Примерные результаты расчеты по эффективности оребрения приведены в графиках рис. 1 и 2. где длину оребренного участка трубопровода приняли равной длине ребра: $L = l$.

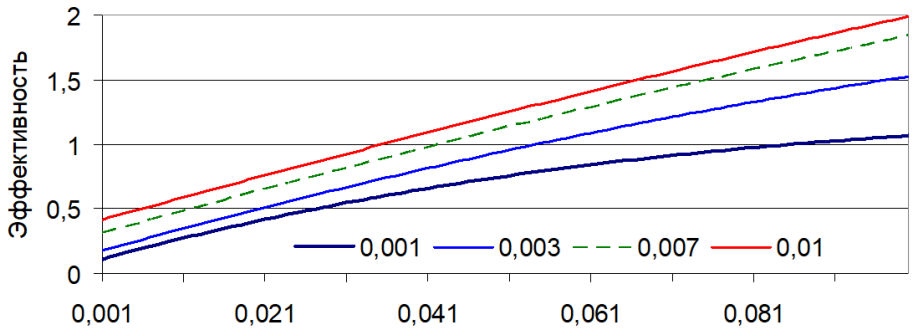


Рис. 1 Графики изменения эффективности ребра с постоянной толщиной (δ = = 0.001, 0.003, 0.005 и 0.010 м) в зависимости от высоты ребра. $T_{ос}$ = 20°C, $T_{ж}$ = = 65°C, $\alpha_1 = 3500$ Вт м$^{-2}$ K^{-1}, $\alpha = 17.5$ Вт м$^{-2}$ K^{-1}, $\lambda = 202$ Вт м$^{-1}$ K^{-1}, $D = 0.03$ м.

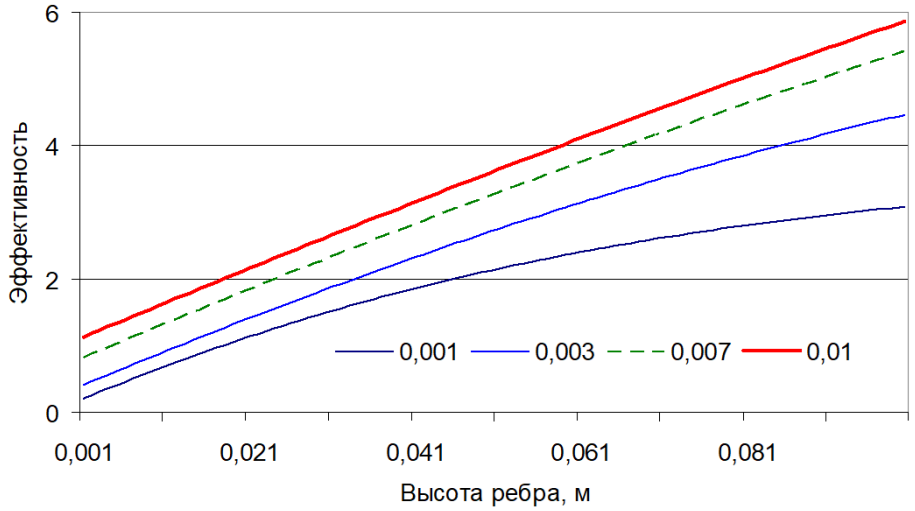


Рис. 2 Графики изменения эффективности оребрения с тремя ребрами с постоянной толщиной в зависимости от высоты ребра. Данные см. рис. 1

Расчеты показали, что при соответствующем выборе толщины, высоты и количества ребер можно обеспечить необходимую кратность увеличения эффективности теплообменника, поставив обратную задачу.

3 Квазиодномерное моделирование путевого изменения температуры теплоносителя по круглому трубопроводу, снабженной прямоугольными ребрами

Точное математическое воспроизведение процессов тепло- и массопереноса в оребренном прямоугольными ребрами круглого цилиндра требует 3D-моделирования. Потому что границы ребра определяются отрезками Декартовой системы координат, а границы трубопровода-теплообменника – ортогональными кривыми цилиндрической системы координат. Программные пакеты ANSYS, Comsol Multiphysics и другие программные комплексы, которые построены на основе метода конечных элементов, могут обеспечить совмещения перечисленных выше двух систем координат. Такие расчеты нами проводились в рамках программного комплекса Comsol Multiphysics, результаты которых удовлетворительно соглашались нашими результатами. Но они труднодоступны для специалистов в области сложного тепло- и массопереноса и занимают много времени (для обеспечения точности расчета 0.001 в простой постановке задачи требовалось более 2.5 часа времени). В связи с этим сочли необходимым предложить простой, инженерный способ расчета путевого изменения температуры жидкого теплоносителя в условиях оребрения трубопровода-теплообменника ребрами тонкого, прямоугольного профиля на основе приведенного выше материала.

Формула распределения температуры по высоте ребра получена в приближении постоянного значения температуры теплоносителя. В самом деле, за счет теплоотдачи теплосодержание теплоносителя терпит изменение. Если температура теплоносителя выше температуры, то происходит убывание температуры теплоносителя и наоборот.

Записываем интенсивность теплоотдачи от одного ребра с малой длиной Δl в виде

$$Q_{p1\Delta} = B(T_{ж} - T_{ос})\Delta l,$$

где

$$B = \frac{2\alpha k_1 \left[\frac{m-k_2}{m}\left(e^{-mH} - e^{-2mH}\right) - \frac{m+k_2}{m}\left(e^{-mH} - 1\right) + 4\delta m e^{-mH}\right]}{(m+k_1)(m+k_2) - (m-k_1)(m-k_2)e^{-2mH}}.$$

Тогда приращение теплосодержания потока на длину составляет

$$Mc_B T_{ж} - Mc_B\left(T_{ж} + \Delta T_{ж}\right) = -Mc_B \Delta T_{ж}.$$

Здесь массовый расход жидкости-теплоносителя считается постоянным и составляет $M = \pi D^2 \rho u/4$, ρ – среднее значение плотности теплоносителя; u – скорость потока; c_B – удельная теплоемкость теплоносителя; $\Delta T_{ж}$ – приращение температуры жидкости, соответствующее расстоянию Δl.

Данное изменение теплосодержания рабочей жидкости обусловлено: теплоотдачей через n ребер – $nB(T_{ж} - \mathrm{T}_{ос})\Delta l$ и теплоотдачей через остальную свободную поверхность трубопровода-теплообменника – $\alpha\left[\pi\left(D + 2\delta_T\right) - 2n\delta\right]\left(T_{ж} - T_{ос}\right)\Delta l$.

Приравнивая приращение теплосодержания потока на длину Δl к сумме двух этих потерь тепла, получим уравнение баланса тепла на элементарную длину Δl

трубопровода:

$$-Mc_B\Delta_{ж} = nB(T_{ж} - T_{ос})\Delta l + \alpha\left[\pi\left(D + 2\delta_T\right) - 2n\delta\right](T_{ж} - T_{ос})\Delta l.$$

Отсюда следует отношение

$$\frac{\Delta_{ж}}{\Delta l} = -a(T_{ж} - T_{ос}).$$

Здесь ввели обозначение постоянной

$$a = \frac{nB + \alpha\left[\pi\left(D + 2\delta_T\right) - 2n\delta\right]}{Mc_B} = const.$$

Предельный переход при $\Delta l \to 0$ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d_{ж}}{dx} = -a(T_{ж} - T_{ос}).$$

Если температура рабочей жидкости на входе рассматриваемого элементарного участка составляет $T_{ж}(0)$, интегрирование последнего уравнения дает экспоненциальный закон изменения температуры теплоносителя:

$$T_{ж}(x) = T_{ос} + \left(T_{ж}(0) - T_{ос}\right)e^{-ax}.$$

Эта формула повторяет формулу Шухова, которая получена для трубопровода без ребра, где используется коэффициент $a = \frac{k_{ср}\pi(D+2\delta_T)}{MC_B}$ [20], а $k_{ср}$ – усредненное значение коэффициента теплоотдачи от теплоносителя в окружающую среду.

Проведены расчеты с варьированием значений отдельных показателей: высоты и толщины ребра, диаметра и толщины трубопровода-теплообменника, скорости потока, температуры теплоносителя во входе теплообменника, температуры окружающей среды и числа ребер. Примерные результаты приведены в виде графиков (рис. 3 и 4).

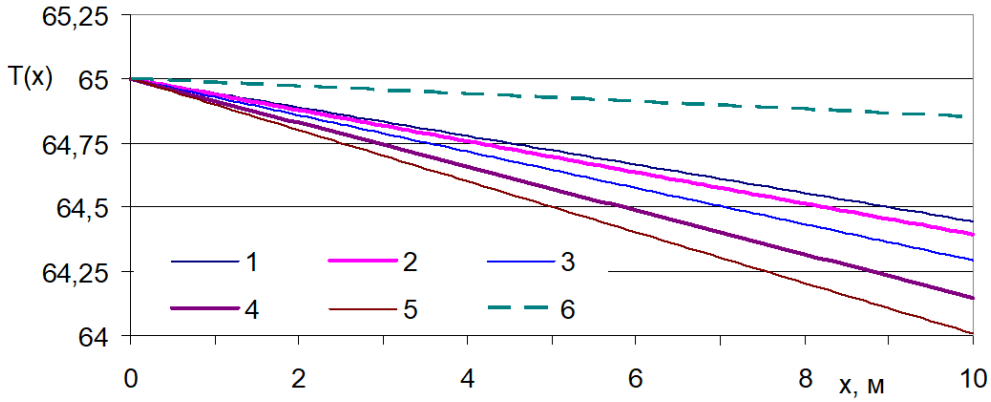


Рис. 3 Путевое изменение температуры теплоносителя при ширинах ребра $\delta = 1.0$ мм (кривая 1), 2 (2), 3 (3), 4 (4) и 5 (5) мм. $H = 5.0$ см, $l = 10.0$ м, $T_{ос} = 20°C$, $T_{ж}(0) = 65°C$, $u = 1$ м/с, $D = 0.03$ м, $\delta_T = 0.002$ м,$\alpha_1 = 3500$ Вт м$^{-2}$ К$^{-1}$, $\alpha = 17.5$ Вт м$^{-2}$ К$^{-1}$, $\lambda = 202$ Вт м$^{-1}$ К$^{-1}$.

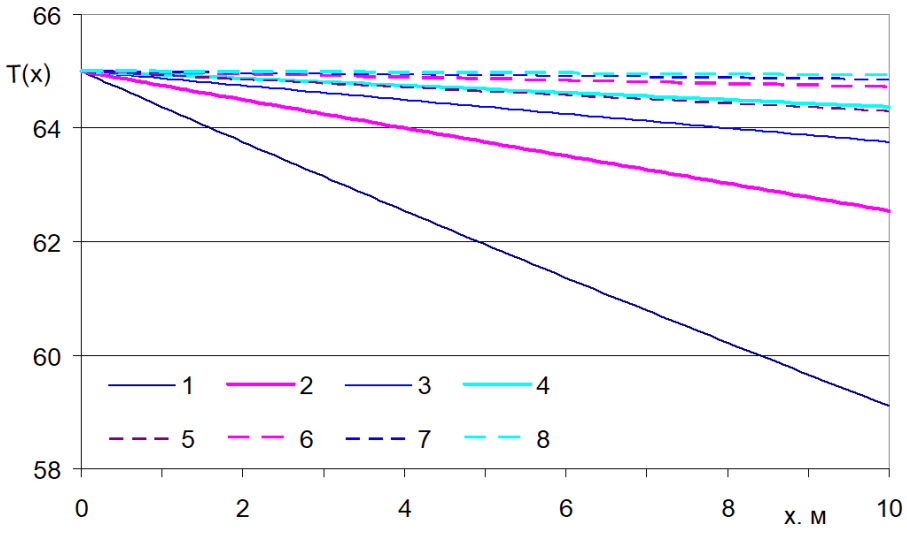


Рис. 4 Путевое изменение температуры теплоносителя при скорости потока $u = 0.2$ (кривые 1 и 5), 0.5 (2 и 6), 1 (3 и 7) и 2 (4 и 8) м/с. Количество рёбер — 4. Штрихом выделены результаты расчётов теплообменника без ребра. $H = 5.0$ см. Остальные данные см. рис. 3.

4 Заключение

В настоящей работе проведено теоретическое и расчетное исследование эффективности оребрения цилиндрического канала с ребрами, расположенными параллельно образующей поверхности трубопровода. На основе уравнений теплового баланса получены аналитические формулы, позволяющие определить интенсивность теплоотдачи как от гладкой цилиндрической поверхности, так и от оребренного теплообменника. При выводе расчетных зависимостей учтен теплообмен через боковые поверхности ребра, свободную торцевую поверхность и основание ребра, контактирующее с цилиндрической поверхностью.

Проведенный анализ формул показал, что эффективность оребрения определяется совокупным влиянием геометрических параметров ребра — высоты, толщины и количества ребер. Расчетные зависимости позволили сформулировать задачу как прямого расчета эффективности, так и решения обратной задачи проектирования теплообменника при заданной кратности увеличения интенсивности теплоотдачи.

Графический анализ результатов расчетов показал, что при увеличении толщины ребра эффективность оребрения возрастает практически по линейному закону. В то же время при увеличении высоты ребра наблюдается нелинейный характер роста эффективности: при малых значениях высоты увеличение эффективности происходит интенсивно, однако при дальнейшем увеличении высоты темпы роста постепенно уменьшаются. Это объясняется снижением температурного градиента вдоль ребра и уменьшением его теплопередающей способности.

Результаты расчетов и построенные графики также показали, что при малых значениях толщины и высоты ребра эффективность оребрения может быть меньше единицы. Это свидетельствует о нецелесообразности применения ребер с малыми геометрическими размерами, поскольку в этом случае увеличение площади поверхности не компенсирует дополнительные тепловые сопротивления.

Исследование влияния количества ребер показало, что увеличение числа оребряющих элементов приводит к росту суммарной интенсивности теплоотдачи, однако этот рост не является аддитивным. Построенные графики эффективности для двух и

трех ребер демонстрируют наличие эффекта насыщения теплоотдачи, при котором добавление последующих ребер приводит к уменьшению относительного прироста эффективности.

Удалось обобщить формулу Шухова для случая оребрения трубопровода-теплообменника п ребрами тонкого, прямоугольного профиля. Т.е. с применением квазиодномерного описания теплопередачи по ребру и такого же подхода теплоотдачи текущего теплоносителя в окружающую среду к трехмерному объекту получена формула для инженерных расчетов.

Полученные аналитические зависимости, расчетные данные и графические результаты имеют важное практическое значение при инженерном проектировании теплообменных аппаратов, радиаторов и отопительных систем. Они позволяют обоснованно выбирать рациональные геометрические параметры оребрения, прогнозировать эффективность теплообмена и обеспечивать требуемое увеличение интенсивности теплоотдачи при минимальных материальных и энергетических затратах.

Литература

[1] *Incropera F.P., Dewitt D.P., Bergman T.L., Lavine A.S.* Fundamentals of Heat and Mass Transfer // – 6th ed. – John Wiley & Sons, Inc., – 2007. – 1070 p.

[2] *Baehr H.D., Stephan K.* Heat and Mass Transfer// – Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, – 2006. – 705 p.

[3] *Тихомиров К.В., Сергеенко Э.С.* Теплотехника, теплогазоснабжение и вентиляция // Учеб. для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. М.: Стройиздат, – 1991. – 480 с.

[4] *Исаев С.И., Кожинов И.А. и др.* Теория тепломассообмена // Под ред. А.И. Леонтьева. М.: Высшая школа, 1979. – 495 с.

[5] *Бухмиров В.В.* Тепломассообмен: Учеб. пособие // Иваново: ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В. И. Ленина», – 2014. – 360 с.

[6] *Аржаева Н.В., Орлова Н.А., Соболев С.В.* Тепломассообмен // Практикум: учеб. пособие / под общ. ред. Ю.П. Скачкова. Пенза: ПГУАС, – 2013. – 112 с.

[7] *Орлов М.Е.* Теоретические основы теплотехники // Тепломассообмен: учебное пособие. Ульяновск: УлГТУ, – 2013. – 204 с.

[8] *Кочев А.Г., Соколов М.М., Кочева Е.А., Москаева А.С.* Тепломассообмен в зданиях и инженерном оборудовании // учеб. пособие. Н. Новгород: ННГАСУ, – 2017. – 88 с.

[9] *Токовой О.К.* Основы тепломассообмена для бакалавров // учебное пособие. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, – 2017. – 196 с.

[10] *Сивухин Д.В.* Общий курс физики // Т. II: Термодинамика и молекулярная физика. М.: Наука, – 1975. – 552 с.

[11] *Еремин А.В.* Методология моделирования тепломассопереноса, упругих колебаний и электромагнитных волн с учетом пространственно-временной нелокальности // Дисс... д-ра техн. наук. – Самара: СамГТУ, – 2021. – 240 с.

[12] *Тихонов А.М., Самарский А.А.* Уравнения математической физики // М.: Наука, – 1977. – 736 с.

[13] *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.* Теплопередача // М., – 1957. – 420 с.

[14] *Юдаев Б.Н.* Теплопередача: Учебное пособие для втузов // М.: Высшая школа, – 1973. – 360 с.

[15] *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен // В 2-х т. Пер. с англ. М.: Мир, – 1990. – Т. 1. – 392 с.

[16] *Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.* Численное моделирование процессов тепло- и массообмена // М.: Наука, 1984. – 288 с.

[17] *Меренков А.П., Хасилев В.Я.* Теория гидравлических цепей // М.: Наука, – 1985. – 278 с.

[18] *Сеннова Е.В., Сидлер В.Г.* Математическое моделирование и оптимизация развивающихся теплоснабжающих систем // Новосибирск: Наука, – 1987. – 219 с.

[19] *Ионин А.А.* Газоснабжение // М.: Стройиздат, – 1989. – 439 с.

[20] *Евдокимов А.Г., Тевяшев А.Д., Дубровский В.В.* Моделирование и оптимизация потокораспределения в инженерных сетях // – 2-е изд., перераб. и доп. М.: Стройиздат, – 1990. – С. 88-127.

[21] *Teskeredzic A., Blazevic R.* Transient Radiator Room Heating-Mathematical Model and Solution Algorithm // Buildings. – 2018. – Vol. 8, № 11. – Art. 163. – doi: http://dx.doi.org/10.3390/buildings8110163.

UDC 532

EFFICIENCY OF A FIN PARALLEL TO THE GENERATOR OF A CYLINDRICAL CHANNEL

[1*]***Ergashev D.Y.***, [1]***Khujaev I.K.***, [2]***Khujaev J.I.***

[*]dilshod77m@gmail.com

[1]Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T. Urazbaev, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

[1]Almalyk State Technical Institute, Almalyk, Uzbekistan

[2]Management Development Institute of Singapore in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan

This paper examines the efficiency of a cylindrical heat exchanger piping finned with fins parallel to the generatrix of the cylindrical surface. Finning efficiency is defined as the ratio of the heat transfer rate from the finned surface to the heat transfer rate of an unfinned cylindrical surface under identical heat exchanger operating conditions. Based on heat balance equations, analytical expressions are derived for the temperature change along the fin height and the heat transfer rate from the surface of a cylindrical channel with and without a fin, taking into account heat transfer through the side and end surfaces of the fin and the finless channel. Using a quasi-one-dimensional approach, an exponential law for the change in coolant temperature along the length of a cylindrical heat exchanger finned with fins in the shape of a right parallelepiped is demonstrated. The results of numerical calculations for the finning efficiency and the change in coolant temperature along the fin path are presented. The obtained results can be used in the engineering design of heat exchangers and heating systems to select rational geometric finning parameters and ensure a specified rate of increase in heat transfer intensity.

Keywords: cylindrical channel, finning, fin geometric parameters, heat balance, heat transfer efficiency, heat transfer intensity, Shukhov's formula, hot-water heating systems.

Citation: Ergashev D.Y., Khujaev I.K., Khujaev J.I. 2026. Efficiency of a fin parallel to the generator of a cylindrical channel. *Problems of mechanics.* 1(35): 95-104.

УДК 677.21.021.152.4

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЫЛЕУЛАВЛИВАНИЯ В СИСТЕМЕ ИЗ ЧЕТЫРЁХ ЦИКЛОНОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ GEKO В ANSYS FLUENT

[1*]***Маликов З.М.,*** [1]***Йулдашев А.Т.,*** [2]***Нуритдинов А.А.***

*malikov.z62@mail.ru

[1]Институт механики и сейсмостойкости сооружений им.М.Т.Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан

[2]АО Алмалыкский ГМК, Алмалык, Узбекистан

В работе представлено численное исследование аэродинамических процессов и эффективности пылеулавливания в четырёхциклонной установке. Моделирование выполнено в программной среде ANSYS Fluent на основе осреднённых по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (RANS) с применением модели турбулентности GEKO. Движение дисперсной фазы описывалось лагранжевым методом Discrete Phase Model (DPM). Расчёты проводились с использованием GPU-ускорения, что позволило повысить вычислительную эффективность при сохранении высокой точности. В ходе исследования получены распределения скорости, давления, интенсивности турбулентности и вихревых структур (Q-критерий), а также выполнен анализ траекторий частиц диаметром 1–100 мкм при плотности 2200 кг/м^3. Установлено, что в цилиндрической части циклонов формируется устойчивая двойная вихревая структура с максимальными скоростями до 31 м/с, обеспечивающая эффективную центробежную сепарацию частиц. Показано, что эффективность улавливания существенно возрастает с увеличением диаметра частиц и достигает практически 100 % для частиц размером более 20 мкм. Полученные результаты подтверждают высокую эффективность четырёхциклонной системы для улавливания средне- и крупнодисперсных частиц и демонстрируют возможности применения модели GEKO для расчёта интенсивно закрученных потоков в промышленном оборудовании.

Ключевые слова: циклон, CFD-моделирование, модели турбулентности GEKO, осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса, Ansys Fluent.

Цитирование: *Маликов З.М., Йулдашев А.Т., Нуритдинов А.А.* Численное моделирование процессов пылеулавливания в системе из четырёх циклонов с использованием модели турбулентности GEKO в ANSYS Fluent // Проблемы механики. – 2026. – №1(35). – С. 105-119.

1 Введение

В современных промышленных условиях очистка газовых выбросов от твёрдых частиц остаётся одной из ключевых задач обеспечения экологической безопасности и энергоэффективности технологических процессов. Циклонные аппараты благодаря простоте конструкции, отсутствию движущихся частей, высокой надёжности и способности работать при повышенных температурах и давлениях широко применяются в металлургической, цементной, химической и энергетической промышленности. Особенно актуальным направлением является использование батарейных и многосекционных циклонов (в том числе конфигурации 4х), обеспечивающих повышение степени улавливания дисперсных частиц при сохранении приемлемых гидравлических потерь.

За последние два десятилетия численное моделирование (CFD) стало основным инструментом исследования аэродинамики и процессов сепарации в циклонных аппаратах. В работе Hoekstra и соавт. (1999) [9] проведено численное моделирование турбулентного течения в циклоне с использованием различных моделей турбулентности и показано влияние выбора модели на структуру вихревого потока и распределение давления. Исследование Slack et al. (2000) [12] было направлено на сравнение RSM и k–ε моделей при расчёте циклонов, где установлено преимущество моделей напряжений Рейнольдса для описания анизотропной турбулентности. Derksen (2003) [4] применил LES-подход для детального анализа вихревой структуры потока и показал значимость нестационарных эффектов при прогнозировании эффективности сепарации.

В работе Zhao et al. (2006) [15] исследовано влияние геометрических параметров циклона на гидродинамику и эффективность улавливания частиц, а также предложены рекомендации по оптимизации конструкции. Bernardo et al. (2006) [1] рассмотрели численную модель дисперсной фазы с использованием лагранжевого подхода и определили зависимость коэффициента полезного действия (КПД) от диаметра частиц. Chu et al. (2009) [3] выполнили трёхмерное моделирование течения в промышленном циклоне и подтвердили адекватность CFD-подхода экспериментальным данным.

Исследования Elsayed и Lacor (2010, 2011) [5, 6] посвящены оптимизации геометрии циклона с использованием численного моделирования; авторами выявлено влияние угла конуса и размеров входного патрубка на эффективность пылеулавливания и потери давления. Brar et al. (2015) [2] проанализировали влияние различных моделей турбулентности на точность расчёта поля скоростей и эффективности сепарации, показав, что корректный выбор модели критически важен для достоверного прогноза КПД. Wang et al. (2017) [13] исследовали поведение мелкодисперсных частиц в сильновихревых потоках и установили, что турбулентная дисперсия существенно влияет на траектории частиц малого диаметра.

В работе Safikhani et al. (2018) [11] выполнена параметрическая оптимизация циклона с применением CFD и методов метамоделирования, что позволило повысить эффективность очистки без значительного увеличения гидравлического сопротивления. Ghodrat et al. (2014) [8] применили CFD-моделирование для анализа взаимодействия частиц в турбулентном вихревом потоке и показали влияние концентрации твёрдой фазы на структуру течения. Lim et al. (2019) [10] исследовали многокорпусные (батарейные) циклоны и установили особенности распределения расхода между параллельными каналами.

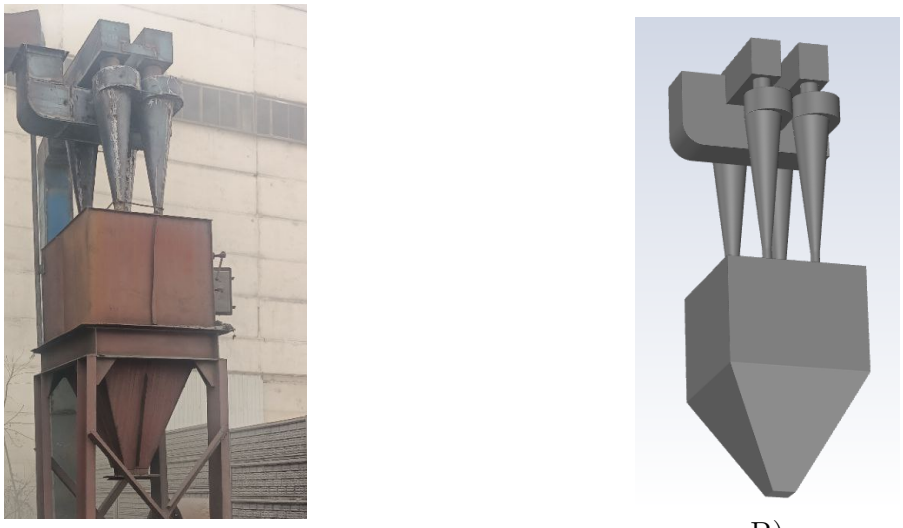
Недавние работы посвящены применению усовершенствованных моделей турбулентности, включая модифицированные k–ω и гибридные модели, для более точного описания закрученных потоков (например, Gao et al., 2020) [7]. Также активно развиваются методы ускорения вычислений, включая использование графических процессоров (GPU) для расчётов в ANSYS Fluent, что позволяет существенно сократить время моделирования при сохранении высокой точности (Zhang et al., 2021) [14].

Несмотря на значительный объём исследований, вопросы численного моделирования многосекционных циклонных систем с применением современных моделей турбулентности, таких как GEKO (Generalized k–ω), остаются недостаточно изученными. Модель GEKO обеспечивает гибкую настройку параметров турбулентности и более корректное описание закрученных потоков по сравнению с классическими двухпараметрическими моделями. В связи с этим актуальным является проведение GPU-ускоренного CFD-моделирования процессов пылеулавливания в четырёхциклонной

установке с целью определения её коэффициента полезного действия и анализа аэродинамических характеристик.

2 Математический и физический постановка задачи

На рис. 1 представлено общий вид четырёхциклонной установки.



A) B)

Рис. 1 Общий вид четырёхциклонной установки: A – фотография промышленной циклонной батареи, установленной на производственном объекте, B – трёхмерная геометрическая модель установки, разработанная в программной среде ANSYS для последующего численного моделирования аэродинамических процессов

На рис. 2 представлено начальные условия.

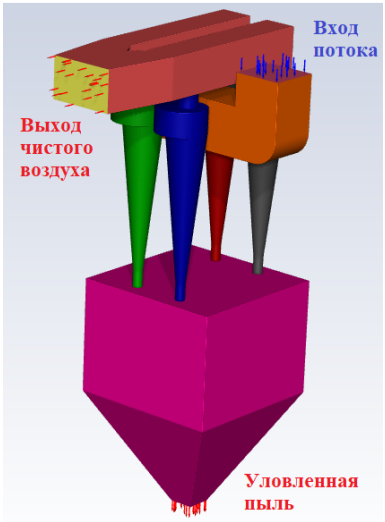


Рис. 2 Начальные условия

В качестве граничных условий на входе расчетной области задано условие скорости потока воздуха с постоянным значением 5 м/с. Турбулентные характеристики на входе определялись с использованием интенсивности турбулентности, которая принималась равной 5%, что соответствует умеренно развитому турбулентному режиму

течения. Направление скорости задавалось перпендикулярно входной поверхности в соответствии с геометрией подводящего канала. На выходных границах расчетной области использовалось условие постоянного статического давления, равного 0 Па (относительно атмосферного), что обеспечивает свободный отток потока без искусственного отражения возмущений. На всех твердых стенках расчетной модели применялось граничное условие no-slip, предполагающее равенство скорости потока нулю на поверхности стенки. Такое задание граничных условий обеспечивает корректное описание вязкого взаимодействия потока с поверхностями и позволяет адекватно моделировать процессы разделения и улавливания пылевых частиц (рис. 2.).

На рис. 3 представлено построение расчетной сетки.

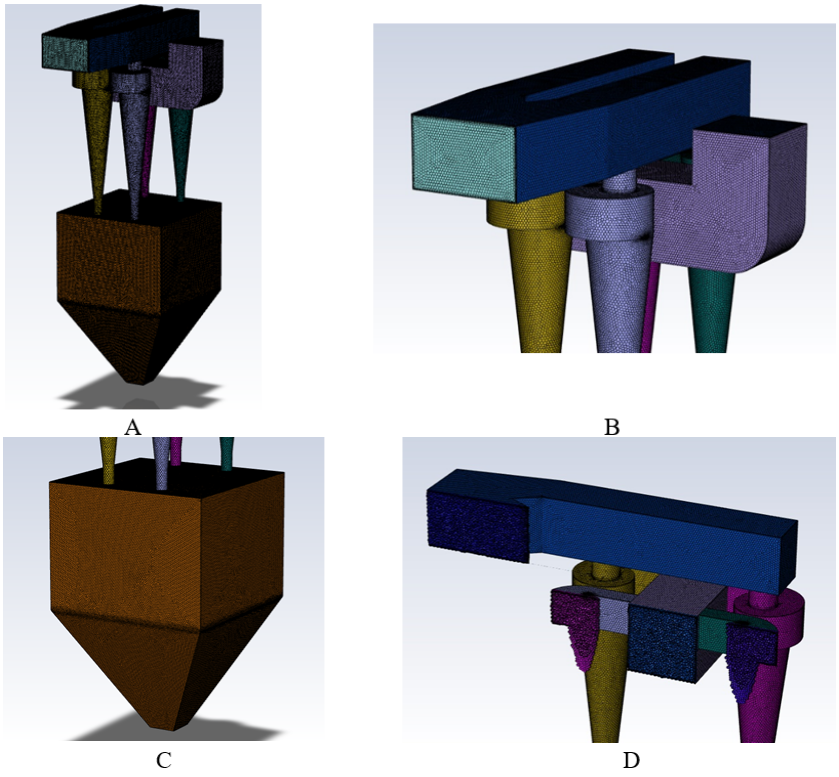


Рис. 3 Построение расчетной сетки

Построение расчетной сетки для исследуемой модели выполнено на основе неструктурированной полиэдральной дискретизации, обеспечивающей высокую степень адаптации к сложной геометрии расчетной области. Сетка охватывает все основные конструктивные элементы установки, включая входные и выходные каналы, соединительные участки и рабочие камеры. Для повышения точности численного решения в зонах интенсивного градиента скорости и давления применялось локальное сгущение ячеек, что позволило детально разрешить структуру потока и вихревые образования. Общая расчетная сетка содержит около 11,7 млн узлов и 2,35 млн полиэдральных ячеек, распределенных по нескольким вычислительным зонам. Использование полиэдральной сетки обеспечило улучшенную сходимость решения, снижение численной диффузии и повышение устойчивости вычислительного процесса. Такая структура сетки является оптимальной для моделирования сложных трехмерных турбулентных течений и позволяет получать достоверные результаты при умеренных вычислительных затратах.

Для моделирования турбулентного закрученного потока в четырёхциклонной установке использовался подход RANS (Reynolds-Averaged Navier–Stokes) в сочетании с моделью турбулентности GEKO (Generalized k–ω). Подход RANS основан на осреднении уравнений Навье–Стокса по времени, в результате чего мгновенные параметры потока представляются в виде суммы среднего значения и флуктуационной составляющей. Такое преобразование приводит к появлению дополнительных напряжений Рейнольдса, для замыкания которых применяется турбулентная модель. Уравнения RANS (Reynolds-Averaged Navier–Stokes) в тензорной форме имеют следующий вид.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial (\bar{U}_i)}{\partial x_j} = 0, \\ \dfrac{\partial (\rho \bar{U}_i)}{\partial t} + \dfrac{\partial (\rho \bar{U}_i \bar{U}_j)}{\partial x_j} = -\dfrac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \bar{G} + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \mu_t)\left(\dfrac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i}\right)\right]. \end{cases} \tag{1}$$

Модель турбулентности SST GEKO (Generalized k-ω), [16, 17] разработанная компанией Ansys, представляет собой расширение стандартной модели SST (Shear Stress Transport) и предназначена для повышения гибкости и точности моделирования турбулентных потоков. Она особенно эффективна для сложных задач с закрученными течениями, смешанными режимами течения, областями сильных градиентов скорости и давления, и находит широкое применение в таких устройствах, как гидроциклоны, центрифуги и другие установки, где важно учитывать сложное поведение турбулентности.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial (\rho k)}{\partial t} + \dfrac{\partial (\rho \bar{U}_j k)}{\partial x_j} = P_k - C_\mu \rho k \omega + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \dfrac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\dfrac{\partial k}{\partial x_j}\right], \\ \dfrac{\partial (\rho \omega)}{\partial t} + \dfrac{\partial (\rho \bar{U}_j \omega)}{\partial x_j} = C_{\omega 1} F_1 \dfrac{\omega}{k} P_k - C_{\omega 2} F_2 \rho \omega^2 + \rho F_3 CD + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \dfrac{\mu_t}{\sigma_\omega}\right)\dfrac{\partial \omega}{\partial x_j}\right]. \end{cases} \tag{2}$$

Турбулентная вихревая вязкость вычисляется по: $\mu_t = \rho \nu_t = \rho \dfrac{k}{\max(\omega, S/C_{Realize})}$.

$$P_k = -\tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \tag{3}$$

$$\tau_{ij}^{EV} = -\overline{\rho u_i' u_j'} = \mu_t 2 S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}, \tag{4}$$

$$CD = \frac{2}{\sigma_\omega} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \tag{5}$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^{EV} - C_{\text{CORNER}} \frac{1.2 \mu_t}{\max\left(0.3\omega, \sqrt{0.5(S^2 + \Omega^2)}\right)} (S_{ik}\Omega_{kj} - \Omega_{ik} S_{kj}), \tag{6}$$

$$\begin{gathered} S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right), \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right), \\ S = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}, \quad \Omega = \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}}. \end{gathered} \tag{7}$$

Остальные коэффициенты и функции было представлено в статье [16].

Моделирование движения частиц пыли в четырёхциклонной установке Моделирование движения твёрдых частиц в газовом потоке выполнено в программной среде ANSYS Fluent с использованием лагранжевого подхода на основе модели Discrete Phase Model (DPM). Расчёт проводился при одностороннем взаимодействии фаз (one-way coupling), при котором влияние частиц на непрерывную фазу не учитывается, что допустимо при малых концентрациях пыли. В качестве дисперсной фазы рассматривались частицы пыли со следующими характеристиками: плотность частиц: $\rho_p = 2200$ кг/м^3, диаметр частиц: $d_p = 1$–100 мкм.

Силы, действующие на частицу Согласно выбранным настройкам модели DPM, при расчёте учитывались следующие силы:

–Сила аэродинамического сопротивления (Drag Force) — основная сила, определяющая относительное движение частицы в потоке газа;

–Сила градиента давления (Pressure Gradient Force) — существенна в условиях интенсивного закрученного потока внутри циклона;

–Сила тяжести — оказывает влияние ввиду высокой плотности частиц.

Не учитывались следующие эффекты: подъёмная сила Саффмана, виртуальная масса, стохастические столкновения, взаимодействие частиц (DEM) и дробление частиц, что соответствует условиям разреженного дисперсного потока.

Движение частицы описывается вторым законом Ньютона:

$$m_p \frac{d\boldsymbol{v}_p}{dt} = F_{\text{drag}} + F_{\text{pressure}} + F_{\text{gravity}}, \tag{8}$$

где ускорение частицы определяется совокупным действием аэродинамических и массовых сил. Особенности движения частиц в циклоне В циклоне газ поступает тангенциально, формируя интенсивный вихревой поток. В результате частицы испытывают действие центробежной силы, направленной к периферии аппарата. Характер движения существенно зависит от диаметра частиц: –Крупные частицы (50–100 мкм) обладают значительной инерцией и под действием центробежных сил быстро перемещаются к стенке циклона с последующим осаждением в бункер. –Средние частицы (10–50 мкм) движутся по спиральным траекториям и в большинстве случаев также осаждаются. –Мелкие частицы (1–10 мкм) имеют малую инерцию, следуют за газовым потоком и могут выноситься через выхлопную трубу. Эффективность отделения частиц определяется их числом Стокса:

$$\text{Stk} = \frac{\rho_p d_p^2 U}{18 \mu D}. \tag{9}$$

При $\text{Stk} > 1$ частица отделяется от потока и осаждается, при $\text{Stk} < 1$ — следует за потоком. Поскольку число Стокса пропорционально квадрату диаметра, увеличение диаметра частицы в 10 раз приводит к увеличению её инерционности в 100 раз, что существенно повышает вероятность осаждения. Численные параметры отслеживания частиц Для обеспечения высокой точности расчёта использовались следующие параметры: включён режим High-Resolution Tracking, схема интегрирования — Runge–Kutta высокого порядка, контроль точности: 10^{-6}, максимальное число шагов: 1 000 000, характерный масштаб длины: 0,001 м.

3 Метод решения

Газодинамическое моделирование четырёхциклонной установки выполнялось в стационарной постановке с использованием давления-скоростной схемы сопряжения

SIMPLE. Пространственная дискретизация уравнений Навье–Стокса осуществлялась методом Least Squares Cell Based для вычисления градиентов, при этом для давления применялась схема второго порядка точности (Second Order), а для уравнений импульса, кинетической энергии турбулентности (k) и удельной скорости диссипации (ω) использовалась аппроксимация Second Order Upwind, обеспечивающая повышенную точность расчёта закрученных потоков. Псевдовременной метод не применялся (Pseudo Time Method — Off), расчёт выполнялся в установившемся режиме. Для обеспечения устойчивости и сходимости численного решения использовались следующие коэффициенты релаксации: для давления — 0,2; для импульса — 0,5; для кинетической энергии турбулентности — 0,5; для удельной скорости диссипации — 0,5; для плотности, массовых сил и турбулентной вязкости — 1,0. Выбранные численные параметры обеспечивают компромисс между устойчивостью итерационного процесса и точностью расчёта сложного турбулентного закрученного течения в циклонной системе.

4 Результаты расчетов и их обсуждение

На рис. 4 представлены изоповерхности Q – критерия, окрашенные по модулю скорости (Velocity, м/с), что позволяет визуализировать пространственную структуру вихревых зон в циклонах и пылесборном бункере.

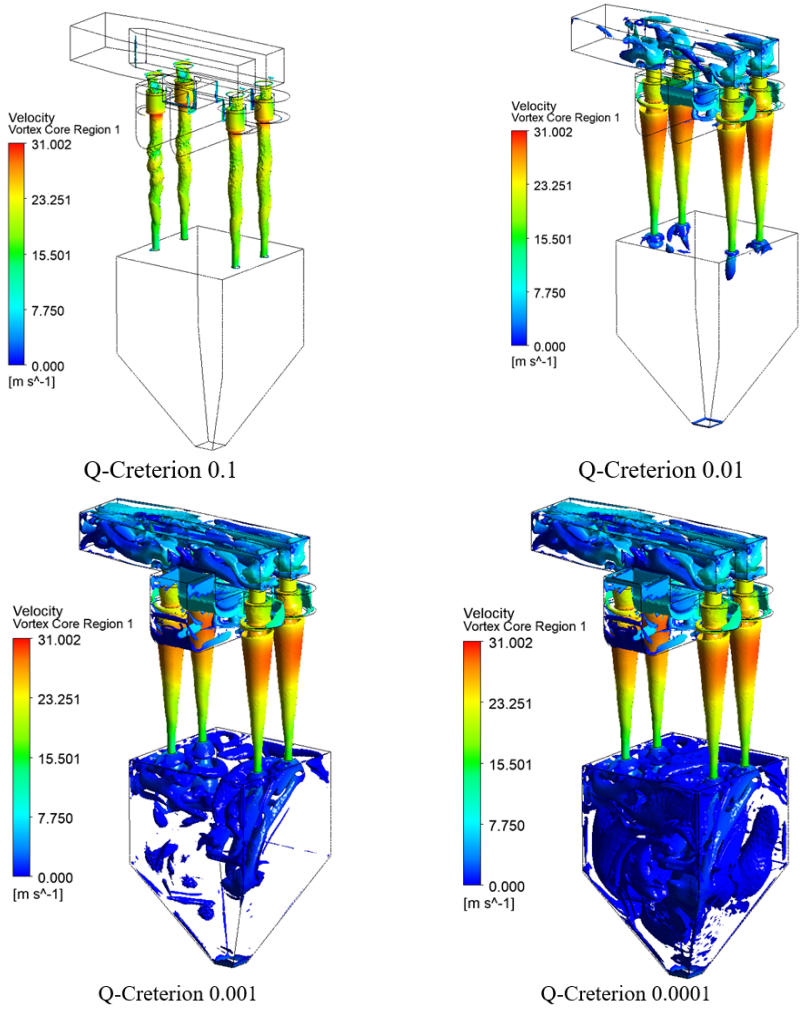


Рис. 4 Визуализация вихревых структур в четырёхциклонной установке на основе Q-критерия при различных пороговых значениях

При значении $Q = 0.1$ отображаются только наиболее интенсивные вихревые ядра, формирующиеся преимущественно в цилиндрической части циклонов. Видны устойчивые осевые вихри с максимальными скоростями до 31 м/с, что соответствует зоне наибольшей центробежной сепарации частиц. При уменьшении порога до $Q = 0.01$ визуализируется более развитая вихревая структура, включая вторичные вихри в зоне входного коллектора и в верхней части циклонов. Наблюдается усложнение структуры закрученного потока. При $Q = 0.001$ проявляются дополнительные мелкомасштабные вихревые образования, в том числе в области пылесборного бункера. Формируется выраженная зона рециркуляции в нижней части установки. При минимальном значении $Q = 0.0001$ визуализируется практически вся вихревая динамика потока, включая слабые турбулентные структуры и крупномасштабные рециркуляционные зоны в бункере. Это свидетельствует о сложном трёхмерном характере течения в четырёхциклонной системе. Анализ распределения вихревых структур показывает, что основные зоны интенсивной сепарации частиц локализованы в цилиндрической части циклонов, где формируется устойчивый осевой вихрь. В нижнем бункере преобладают зоны пониженных скоростей и рециркуляции, что способствует осаждению улавливаемых частиц.

На рис. 5 представлены распределение скорости, давления и интенсивности турбулентности в четырёхциклонной установке: A – поле скоростей; B – распределение статического давления; C – распределение интенсивности турбулентности.

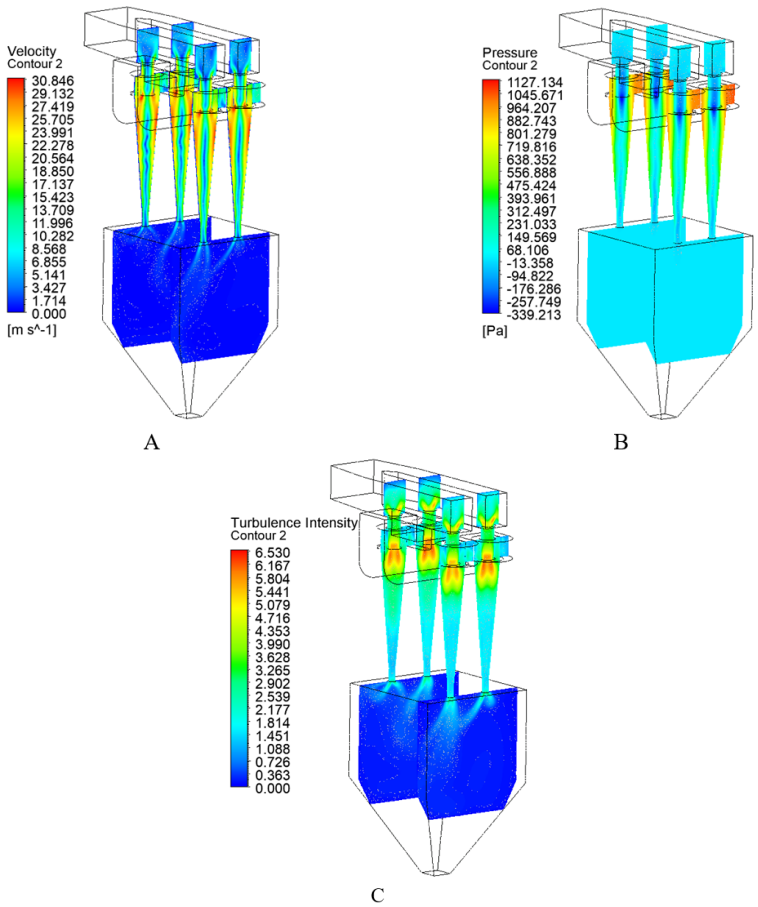


Рис. 5 Распределение скорости, давления и интенсивности турбулентности в четырёхциклонной установке: A – поле скоростей; B – распределение статического давления; C – распределение интенсивности турбулентности.

На рис. 5 A представлено распределение модуля скорости газа в четырёхциклонной системе. Максимальные значения скорости (до 30–31 м/с) наблюдаются в цилиндрической части циклонов и во входных патрубках, что связано с тангенциальной подачей газа и формированием интенсивного закрученного потока. В конической части скорость постепенно уменьшается по мере продвижения потока к нижнему выходу. В пылесборном бункере преобладают низкие скорости (менее 5 м/с), что способствует осаждению твёрдых частиц. На рис.5 B показано распределение статического давления. Наибольшие значения давления фиксируются в области входного коллектора и в верхней части циклонов, где происходит ускорение и перераспределение потока. По мере продвижения газа вниз по конусу наблюдается снижение давления, обусловленное гидравлическими потерями и преобразованием потенциальной энергии давления в кинетическую энергию вращательного движения. В нижней части системы формируется зона пониженного давления, обеспечивающая устойчивую циркуляцию потока. На рис.5 C представлено распределение интенсивности турбулентности. Максимальные значения (до 6 %) сосредоточены в зоне входа газа в циклоны и в области перехода из цилиндрической части в коническую, где возникают значительные градиенты скорости и вихревые структуры. В центральной осевой зоне формируется устойчивый вихревой поток с пониженной турбулентностью. В бункере интенсивность турбулентности уменьшается вследствие снижения скоростей и затухания вихревых структур.

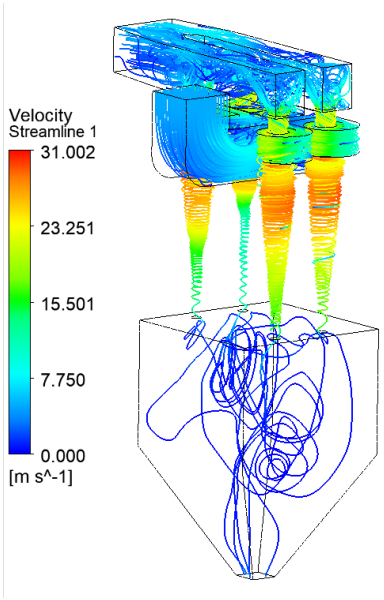


Рис. 6 Линии тока (Streamlines), окрашенные по модулю скорости, в четырёхциклонной установке

На рис. 6 представлено Линии тока (Streamlines), окрашенные по модулю скорости, в четырёхциклонной установке. На рисунке представлена пространственная структура течения газа в четырёхциклонной системе в виде линий тока, окрашенных по значению модуля скорости (0–31 м/с). В верхнем коллекторе наблюдается перераспределение потока между четырьмя циклонами, при этом максимальные скорости формируются в зоне входных патрубков вследствие тангенциальной подачи газа. В цилиндрической части каждого циклона формируется интенсивный закрученный

поток с выраженной спиральной структурой. Линии тока демонстрируют нисходящее вращательное движение вдоль стенок аппарата, что соответствует внешнему вихрю. По мере продвижения к нижней конической части поток ускоряется, достигая максимальных скоростей в зоне формирования устойчивого вихревого ядра. В пылесборном бункере наблюдается сложная трёхмерная картина течения с выраженными зонами рециркуляции и пониженными скоростями (менее 5 м/с). Линии тока образуют замкнутые циркуляционные структуры, что свидетельствует о наличии вторичных вихрей. Эти зоны способствуют снижению кинетической энергии потока и создают благоприятные условия для осаждения твёрдых частиц.

Для анализа распределения скорости в четырёхциклонной установке были выбраны четыре характерных контрольных сечения, расположенные в рабочих зонах каждого циклона (Рис. 7). Сечения проходили через области формирования закрученного потока в цилиндрической части аппаратов и ориентировались таким образом, чтобы охватить как периферийную зону максимальных скоростей, так и центральную область вихревого ядра. Первое и второе сечения располагались в правой части установки в зоне двух крайних циклонов, тогда как третье и четвёртое — в левой части батареи. Линии отбора данных проходили через характерные зоны вращательного движения потока, что позволило зафиксировать изменение скорости от периферии к осевой области. Такое расположение контрольных сечений обеспечило возможность сравнительного анализа распределения скорости в каждом из четырёх параллельно работающих циклонов и позволило оценить равномерность распределения газового потока между ними.

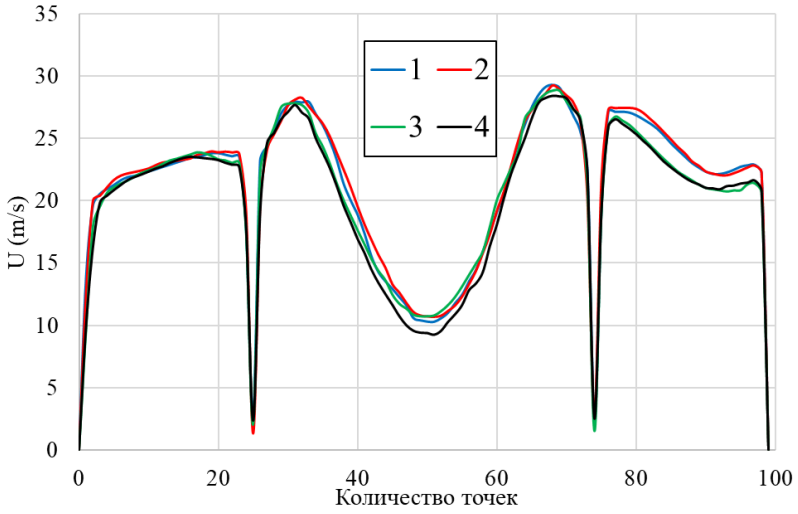


Рис. 7 Распределение скорости по контрольным сечениям четырёхциклонной установки

График демонстрирует распределение скорости газа (U, м/с) по 100 расчётным точкам в каждом из четырёх сечений. Максимальные значения скорости достигают 28–30 м/с и наблюдаются в зонах формирования закрученного потока в цилиндрической части циклонов. Резкие минимумы скорости (до 1–3 м/с) соответствуют областям центрального вихревого ядра и зонам рециркуляции. Сечения 1 и 2 характеризуются несколько более высокими пиковыми значениями скорости по сравнению с сечениями 3 и 4, что свидетельствует о незначительной неравномерности распределения потока между параллельно работающими циклонами. В центральной

части графика (примерно точки 40–55) наблюдается снижение скорости до 9–12 м/с, что связано с переходом потока в область пониженного давления и развитием внутреннего вихря. Практически симметричный характер кривых подтверждает близкие гидродинамические условия работы всех четырёх циклонов. Небольшие расхождения между кривыми объясняются влиянием входного коллектора и особенностями распределения расхода газа. Полученные профили скорости подтверждают формирование интенсивного закрученного потока и устойчивой вихревой структуры, обеспечивающей эффективную центробежную сепарацию частиц пыли.

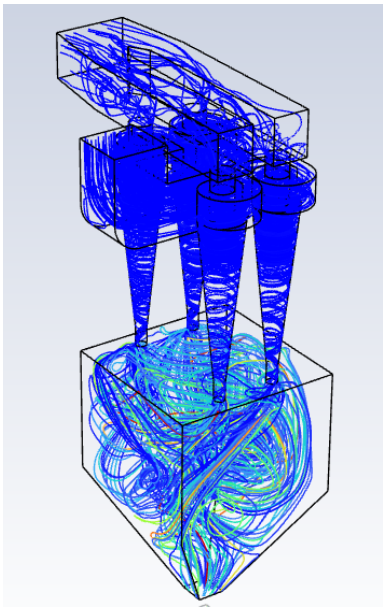


Рис. 8 Траектории движения частицы пыли диаметром $D = 1$ мкм в четырёхциклонной установке

На рис.7 представлены рассчитанные траектории движения частицы пыли диаметром 1 мкм, полученные с использованием лагранжевой модели Discrete Phase Model (DPM). Линии тока демонстрируют пространственную структуру перемещения частицы в верхнем распределительном коллекторе, в цилиндрической и конической частях циклонов, а также в пылесборном бункере. В верхнем коллекторе частица следует за основным газовым потоком, испытывая многократные изменения направления движения вследствие сложной трёхмерной структуры течения. В цилиндрической части циклона формируется закрученный поток, однако из-за малого диаметра (1 мкм) и, соответственно, низкой инерционности частица преимущественно движется совместно с газовой фазой и не прижимается интенсивно к стенке аппарата. В нижней части установки наблюдаются выраженные зоны рециркуляции, где траектория частицы приобретает хаотический характер с многочисленными спиральными витками. Это свидетельствует о том, что мелкодисперсные частицы обладают высокой чувствительностью к турбулентным пульсациям и вихревым структурам потока. Полученные результаты подтверждают, что частицы диаметром 1 мкм имеют малое число Стокса и, вследствие этого, обладают ограниченной способностью к центробежной сепарации, что может приводить к их частичному выносу с очищенным газом.

На рис. 8 представлена зависимость процента частиц, осевших в пылесборном бункере, от их диаметра (D, мкм). По оси абсцисс отложен диаметр частиц в диапазоне 1–40 мкм, по оси ординат — доля осевших частиц, %.

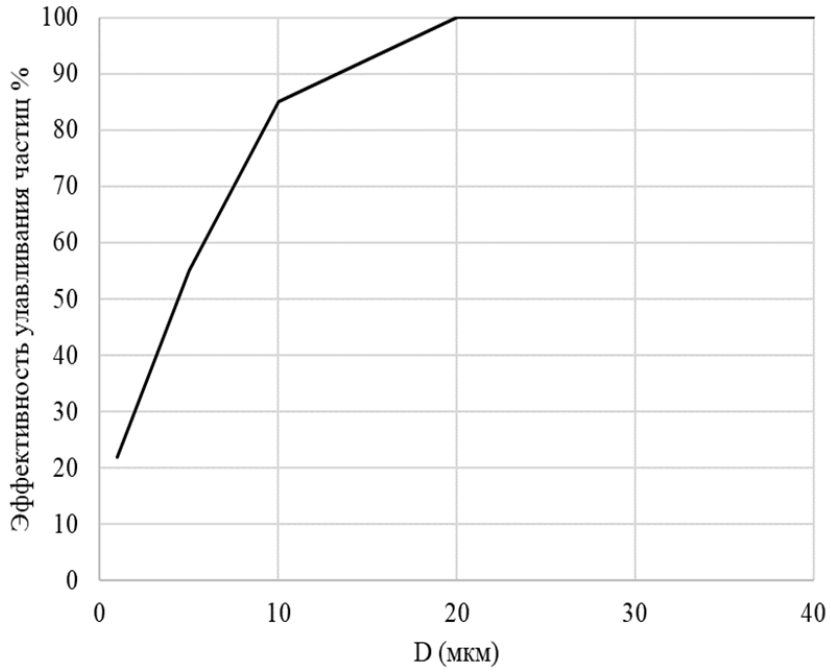


Рис. 9 Зависимость доли частиц, осевших в бункере, от их диаметра

Анализ результатов показывает, что эффективность осаждения существенно возрастает с увеличением диаметра частиц. Для частиц диаметром около 1–2 мкм доля осевших в бункере составляет приблизительно 20–25 %, что объясняется их низкой инерционностью и способностью следовать за газовым потоком. При увеличении диаметра до 5 мкм эффективность сепарации возрастает до 55 %, а для частиц размером 10 мкм достигает 80–85 %. Начиная с диаметра 20 мкм наблюдается практически полное улавливание частиц (до 100 %), что связано с ростом центробежных сил и увеличением числа Стокса. Полученная зависимость носит нелинейный характер и соответствует теоретическим представлениям о центробежной сепарации: инерционные силы пропорциональны квадрату диаметра частицы, что приводит к резкому росту эффективности улавливания при увеличении размера дисперсной фазы. Таким образом, четырёхциклонная установка обеспечивает высокую эффективность очистки для частиц диаметром более 15–20 мкм, тогда как мелкодисперсная фракция (<5 мкм) улавливается частично.

5 Заключение

В данной работе выполнено численное моделирование аэродинамических процессов и движения дисперсной фазы в четырёхциклонной пылеулавливающей установке с использованием программного комплекса ANSYS Fluent. Расчёты проведены на основе осреднённых по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (RANS) с применением модели турбулентности GEKO, обеспечивающей корректное описание интенсивных закрученных потоков. Движение частиц пыли моделировалось лагранжевым методом Discrete Phase Model (DPM) с учётом сил аэродинамического сопротивления, градиента давления и гравитации. Результаты моделирования показали формирова-

ние устойчивой двойной вихревой структуры в каждом циклоне, характеризующейся высокими скоростями в цилиндрической части (до 30–31 м/с) и зонами рециркуляции в пылесборном бункере. Анализ распределения скорости, давления и интенсивности турбулентности подтвердил равномерность работы четырёх параллельно соединённых циклонов и эффективное перераспределение потока в входном коллекторе. Исследование траекторий частиц различного диаметра показало существенную зависимость эффективности улавливания от их размера. Для частиц диаметром 1–2 мкм наблюдается низкая степень осаждения вследствие малой инерционности, тогда как частицы диаметром более 20 мкм практически полностью улавливаются в бункере. Установлено, что эффективность сепарации возрастает нелинейно с увеличением диаметра частиц, что согласуется с ростом числа Стокса и усилением центробежных сил. Таким образом, четырёхциклонная установка обеспечивает высокую степень очистки газа от средне и крупнодисперсных частиц, при этом мелкодисперсная фракция требует дополнительных мер очистки. Применение GPU-ускоренного CFD-моделирования позволило повысить вычислительную эффективность расчётов и получить детальную картину гидродинамических и сепарационных процессов в промышленной циклонной системе.

Литература

[1] *Bernardo S., Mori M., Peres A.P., Dionísio R.P.* 3-D computational fluid dynamics for gas and gas–particle flows in a cyclone with different inlet section angles // Powder Technology. – 2006. – Vol. 162, – №3. – P. 190–200.

[2] *Brar L.S., Sharma R.P., Elsayed K.* The effect of turbulence modeling on prediction of cyclone separator performance // Advanced Powder Technology. – 2015. – Vol. 26, – №2. – P. 451–462.

[3] *Chu K.W., Wang B., Xu D.L., Chen Y.X., Yu A.B.* CFD-DEM simulation of the gas–solid flow in a cyclone separator // Chemical Engineering Science. – 2009. – Vol. 64, – №16. – P. 3726–3739.

[4] *Derksen J.J.* Numerical simulation of solids suspension in a stirred tank // AIChE Journal. – 2003. – Vol. 49, – №11. – P. 2700–2714.

[5] *Elsayed K., Lacor C.* The effect of cyclone inlet dimensions on the flow pattern and performance // Applied Mathematical Modelling. – 2010. – Vol. 34, – №9. – P. 2523–2539.

[6] *Elsayed K., Lacor C.* Modeling and Pareto optimization of gas cyclone separator performance using CFD // Powder Technology. – 2011. – Vol. 210, – №1. – P. 53–64.

[7] *Gao Z., Wang J., Li H.* Numerical investigation of swirling turbulent flow in cyclone separators using advanced turbulence models // Chemical Engineering Research and Design. – 2020. – Vol. 160. – P. 128–140.

[8] *Ghodrat M., Qi Z., Kuang S., Yu A.B., Vince A.* Computational study of the multiphase flow and performance of a cyclone separator // Powder Technology. – 2014. – Vol. 268. – P. 203–213.

[9] *Hoekstra A.J., Derksen J.J., Van den Akker H. E.A.* An experimental and numerical study of turbulent swirling flow in gas cyclones // Chemical Engineering Science. – 1999. – Vol. 54, – №13–14. – P. 2055–2065.

[10] *Lim K.S., Yoon J.Y., Kim J.H.* Numerical study on flow distribution and performance of a multicyclone system // Powder Technology. – 2019. – Vol. 343. – P. 770–811.

[11] *Safikhani H., Abbasi A., Ahmadi G.* Multi-objective optimization of cyclone separators using CFD and response surface methodology // Chemical Engineering Research and Design. – 2018. – Vol. 132. – P. 112–123.

[12] *Slack M.D., Prasad R.O., Bakker A., Boysan F.* Advances in cyclone modelling using CFD // Chemical Engineering Research and Design. – 2000. – Vol. 78, – №8. – P. 1098–1104.

[13] *Wang B., Xu D.L., Chu K.W., Yu A.B.* Numerical study of gas–solid flow in cyclone separators: Effect of particle size // Powder Technology. – 2017. – Vol. 314. – P. 17–30.

[14] *Zhang Y., Li X., Chen J.* GPU-accelerated CFD simulations of turbulent flows in industrial separators // Computers & Fluids. – 2021. – Vol. 226. – P. 104999.

[15] *Zhao B., Su Y., Zhang J.* Simulation of gas flow pattern and separation efficiency in cyclone separators // Chemical Engineering Journal. – 2006. – Vol. 116, – №1. – P. 41–50.

[16] *Li Z., Liu Y., Zhou W., Wen X., Liu Y.* Thermal pollution level reduction by sweeping jet-based enhanced heat dissipation: A numerical study with calibrated Generalized k-ω (GEKO) model // Applied Thermal Engineering. – 2022. – Vol. 204. – P. 117990.

[17] *Menter F.R.* Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications // AIAA Journal. – 1994. – Vol. 32, – №8. – P. 1598-1605.

UDC 677.21.021.152.4

NUMERICAL SIMULATION OF DUST COLLECTION PROCESSES IN A FOUR-CYCLONE SYSTEM USING THE GEKO TURBULENCE MODEL IN ANSYS FLUENT

[1*]***Malikov Z.M.,*** [1] ***Yuldashev A.T.,*** [2] ***Nuritdinov A.A.***

[*]malikov.z62@mail.ru

[1]Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T. Urazbaev, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

[2]JSC Almalyk Mining and Metallurgical Complex, Almalyk, Uzbekistan.

This paper presents a numerical study of aerodynamic processes and dust collection efficiency in a four-cyclone system. The simulation was carried out in the ANSYS Fluent software environment based on the Reynolds-averaged Navier–Stokes (RANS) equations using the GEKO turbulence model. The motion of the dispersed phase was described by the Lagrangian approach employing the Discrete Phase Model (DPM). The calculations were performed with GPU acceleration, which improved computational efficiency while maintaining high accuracy. During the study, distributions of velocity, pressure, turbulence intensity, and vortex structures (Q- criterion) were obtained, and the trajectories of particles with diameters ranging from 1 to 100 μm and a density of 2200 kg/m^3 were analyzed. It was found that a stable double-vortex structure is formed in the cylindrical part of the cyclones, with maximum velocities reaching up to 31 m/s, ensuring efficient centrifugal separation of particles. The results show that the collection efficiency significantly increases with particle diameter and reaches nearly 100% for particles larger than 20 μm. The obtained results confirm the high efficiency of the four-cyclone system for capturing medium- and coarse-dispersed particles and demonstrate the applicability of the GEKO turbulence model for simulating strongly swirling flows in industrial equipment.

Keywords: cyclone, CFD modeling, GEKO turbulence model, Reynolds-averaged Navier–Stokes equations, ANSYS Fluent.

Citation: Malikov Z.M., Yuldashev A.T., Nuritdinov A.A. 2026. Numerical Simulation of Dust Collection Processes in a Four-Cyclone System Using the GEKO Turbulence Model in ANSYS Fluent. *Problems of mechanics.* 1(35): 105-119.

УДК 532

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕШЁТЧАТОГО БОЛЬЦМАНА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБТЕКАНИЯ КВАДРАТНОГО ЦИЛИНДРА

[1*]***Мадалиев М.Э.***

[*]Madaliev.me2019@mail.ru ,m.e.madaliyev@ferpi.uz

[1]Ферганский государственный технический университет, Фергана, Узбекистан

В данной работе рассматривается применение метода решётчатого Больцмана (Lattice Boltzmann Method, LBM) для численного моделирования процесса обтекания квадратного цилиндра вязкой несжимаемой жидкостью. Отмечается, что при изучении движения жидкостей и газов наряду с классическим подходом, основанным на решении уравнений Навье–Стокса, может эффективно применяться кинетический метод LBM, обладающий рядом вычислительных преимуществ при моделировании сложных течений. Исследование направлено на анализ структуры потока, распределения скоростей и формирования вихревых зон вблизи препятствия. Численная реализация выполнена на основе двумерной девятискоростной модели (D2Q9) с использованием языка программирования Python. В работе представлены результаты вычислительного эксперимента, включая визуализацию полей скорости, векторных диаграмм и изолиний. Полученные результаты демонстрируют эффективность метода LBM при решении задач гидро- и газодинамики и подтверждают его перспективность в качестве альтернативы традиционным методам, основанным на уравнениях Навье–Стокса.

Ключевые слова: метод решётчатого Больцмана, LBM, численное моделирование, квадратный цилиндр, модель D2Q9.

Цитирование: *Мадалиев М.Э.* Применение метода решётчатого Больцмана для моделирования обтекания квадратного цилиндра // Проблемы механики. – 2026. – №1(35). – С. 119-128.

1 Введение

Моделирование движения жидкостей и газов является одной из центральных задач вычислительной гидродинамики (CFD). Традиционно динамика сплошной среды описывается уравнениями Навье–Стокса, которые представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Несмотря на фундаментальный характер данной модели, её численная реализация при сложной геометрии области, наличии препятствий и нестационарных режимах течения требует значительных вычислительных затрат и устойчивых алгоритмов дискретизации.

В качестве альтернативного подхода в последние десятилетия активно развивается метод решётчатого Больцмана (Lattice Boltzmann Method, LBM), основанный на кинетической теории газов и дискретной форме уравнения Больцмана. Фундаментальные основы метода были заложены в работах McNamara и Zanetti (1988) [1], а дальнейшее развитие и теоретическое обоснование получили в исследованиях Higuera и Jiménez (1989) [2], а также Qian, d'Humières и Lallemand (1992) [3], где была предложена модель D2Q9, широко применяемая для двумерных задач.

Chen и Doolen (1998) [4] представили подробный обзор метода LBM и показали его связь с макроскопическими уравнениями Навье–Стокса через асимптотическое разложение Чепмена–Энскога. В работе Succi (2001) [5] метод был систематизирован как эффективный инструмент вычислительной гидродинамики, обладающий

высокой степенью параллелизации и алгоритмической простотой. Важный вклад в развитие устойчивых и точных схем внесли d'Humières (1992) [6], предложивший много-релаксационную модель (MRT), а также Lallemand и Luo (2000) [8], исследовавшие численную устойчивость различных схем релаксации. He и Luo (1997) [7] продемонстрировали кинетическое обоснование метода и его корректный переход к уравнениям Навье–Стокса.

Значительное внимание в научной литературе уделяется применению LBM к задачам обтекания твёрдых тел. Aidun и Clausen (2010) [9] показали эффективность метода при моделировании взаимодействия потока с частицами и сложными геометриями. Исследования обтекания цилиндров и тел с острыми кромками демонстрируют способность LBM корректно воспроизводить зоны рециркуляции, вихреобразование и нестационарные режимы течения [10]. Обтекание квадратного цилиндра представляет особый интерес, поскольку наличие острых углов приводит к формированию сложной структуры вихрей и выраженной несимметричности потока при определённых числах Рейнольдса. Моделирование подобных течений позволяет оценить точность численных методов и выявить особенности распределения скоростей и давления.

В настоящей работе рассматривается применение метода решётчатого Больцмана для моделирования двумерного обтекания квадратного цилиндра вязкой несжимаемой жидкостью. Численная реализация основана на модели D2Q9 с однопараметрической схемой релаксации (BGK) и выполнена с использованием языка программирования Python. Основное внимание уделяется анализу распределения скоростей, формированию вихревых структур и визуализации изолиний, что позволяет продемонстрировать практическую применимость LBM при исследовании гидро- и газодинамических процессов.

2 Физическая и математическая постановка задачи

Рассматривается задача двумерного нестационарного обтекания квадратного цилиндра вязкой несжимаемой жидкостью при числе Рейнольдса Re=10 и 250. Геометрия расчётной области представлена прямоугольным каналом длиной 20D и высотой 5D, где D — характерный размер стороны квадратного цилиндра (Рис. 1).

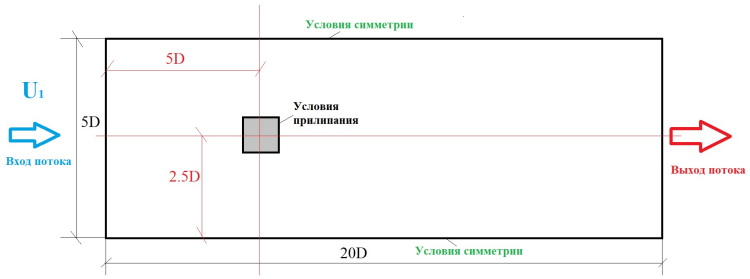


Рис. 1 Расчетная область.

Квадратное препятствие со стороной D размещено внутри канала на расстоянии 5D от входной границы и симметрично относительно центральной горизонтальной оси области. Расстояние от центра цилиндра до нижней границы составляет 2.5D, что обеспечивает симметричное расположение тела по высоте канала.

Граничные условия

Входная граница (inlet) – задаётся равномерный профиль скорости U1, направленный вдоль оси x. Выходная граница (outlet) – используется условие нулевого градиента скорости по направлению потока. Верхняя и нижняя границы – задаются условия симметрии. Поверхность квадратного цилиндра – применяется условие прилипания (no-slip condition). В рассматриваемой задаче проведены расчёты при различных значениях числа Рейнольдса. В частности, при Re=10 течение остается стационарным и симметричным, тогда как при Re=250 реализуется переходный режим течения, при котором за препятствием формируется выраженная вихревая дорожка Кармана и наблюдаются периодические колебания структуры потока. Поскольку цель работы заключается в практической реализации численного алгоритма, подробный вывод уравнения Больцмана не рассматривается; далее используется его дискретная форма, применяемая в методе решётчатого Больцмана.

Математическая реализация метода LBM

В данной работе численное моделирование течения осуществляется методом решётчатого Больцмана (Lattice Boltzmann Method, LBM) на основе двумерной девятискоростной модели D2Q9 с однопараметрической схемой релаксации Бхатнагара–Гросса–Крука (BGK) [11].

Дискретное уравнение Больцмана

Эволюция функции распределения частиц $f_i(\mathbf{x}, t)$ в LBM описывается дискретным уравнением Больцмана:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t,\ t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau}\left[f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)\right] \tag{1}$$

где: f_i — функция распределения в направлении i, c_i — дискретные скорости, τ — параметр релаксации, f_i^{eq} — равновесная функция распределения. Правая часть уравнения представляет собой коллизионный оператор BGK. ***Модель D2Q9***

В двумерной девятискоростной модели используются следующие дискретные скорости (Рис. 2):

$$\mathbf{c}_i = \begin{cases} (0,0), & i = 0, \\ (\pm 1, 0),\ (0, \pm 1), & i = 1, 3, 5, 7, \\ (\pm 1, \pm 1), & i = 2, 4, 6, 8. \end{cases} \tag{2}$$

Весовые коэффициенты имеют вид:

$$w_0 = \frac{4}{9}, \qquad w_{1,3,5,7} = \frac{1}{9}, \qquad w_{2,4,6,8} = \frac{1}{36}. \tag{3}$$

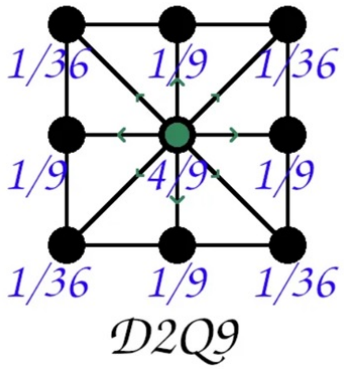


Рис. 2 Модель D2Q9.

Макроскопические параметры

Плотность и скорость вычисляются через моменты функции распределения:

$$\rho = \sum_{i=0}^{8} f_i, \qquad \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=0}^{8} f_i \mathbf{c}_i. \tag{4}$$

Равновесная функция распределения

Равновесная функция f_i^{eq} задаётся в виде разложения по малому числу Маха:

$$f_i^{eq} = \rho w_i \left[1 + 3(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}) + \frac{9}{2}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2}\mathbf{u}^2 \right]. \tag{5}$$

Данная форма обеспечивает корректное восстановление уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости при малых скоростях.

Связь параметра релаксации с вязкостью

Кинематическая вязкость ν связана с параметром релаксации τ следующим соотношением:

$$\nu = c_s^2 \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \Delta t, \tag{6}$$

где $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$ — скорость звука в модели D2Q9. При Δt формула упрощается:

$$\nu = \frac{1}{3} \left(\tau - \frac{1}{2} \right), \tag{7}$$

Таким образом, параметр релаксации определяется как:

$$\tau = 3\nu + \frac{1}{2}. \tag{8}$$

Выбор τ>0.5 обеспечивает физически корректное значение вязкости и численную устойчивость расчёта.

Численный алгоритм

Алгоритм LBM состоит из двух основных этапов: 1. Столкновение (Collision):

$$f_i^* = f_i - \frac{1}{\tau} \left(f_i - f_i^{eq} \right), \tag{9}$$

2. Перенос (Streaming):

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i,\ t+1) = f_i^*(\mathbf{x}, t). \tag{10}$$

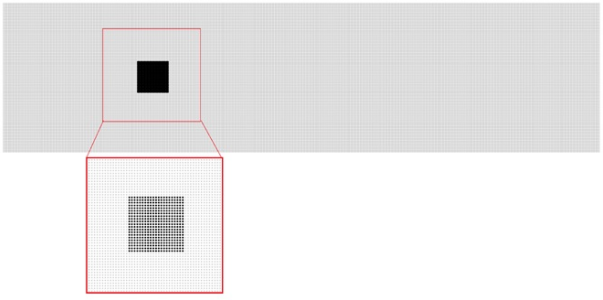


Рис. 3 Расчётная область течения и структура вычислительной сетки LBM.

Граничные условия реализуются с использованием схемы отражения (bounce-back) для поверхности квадратного цилиндра, что обеспечивает выполнение условия прилипания.

На рисунке 3 представлено расчётная область течения и структура вычислительной сетки LBM с размерностью 400 × 100 узлов (по осям X и Y соответственно). Квадратное препятствие расположено в центральной части канала. В нижней части показан увеличенный фрагмент сетки вблизи цилиндра для демонстрации дискретизации области.

Следует отметить, что в методе решётчатого Больцмана (LBM) используется фиксированная равномерная решётка с постоянным шагом дискретизации. Узлы сетки остаются неизменными в процессе расчёта, поскольку метод основан на кинетическом подходе и эволюции функций распределения частиц в дискретных направлениях скоростей. Простота структуры решётки обусловлена тем, что геометрия области учитывается через граничные условия (например, схема bounce-back), а не через адаптивное перестроение сетки. В отличие от этого, в традиционных методах вычислительной гидродинамики (CFD), основанных на решении уравнений Навье–Стокса методом конечных объёмов или конечных элементов, часто применяются неструктурированные или адаптивные сетки. Такие сетки могут сгущаться в областях с большими градиентами скорости или давления для повышения точности расчёта. Однако их построение и обработка существенно усложняют численный алгоритм. Таким образом, использование фиксированной регулярной решётки в LBM обеспечивает алгоритмическую простоту, удобство реализации и высокую эффективность параллельных вычислений.

3 Результаты и их обсуждение

На рисунке 4 представлено распределение продольной компоненты скорости Ux в различных сечениях расчётной области при Re=250.

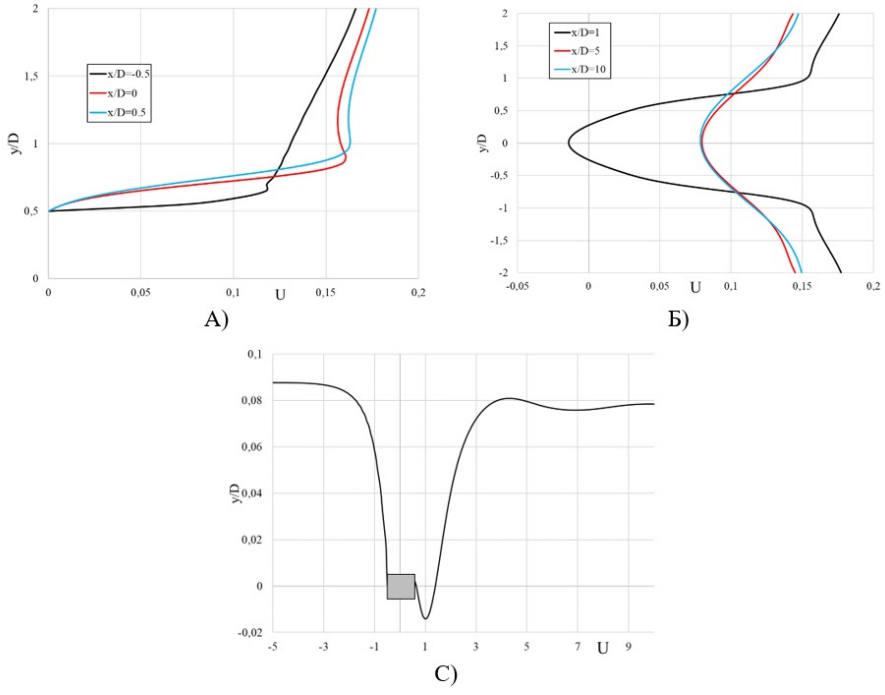


Рис. 4 Распределение продольной компоненты скорости Ux в различных сечениях.

Здесь A) Профили скорости Ux в вертикальных сечениях, расположенных в верхней части квадратного цилиндра. Наблюдается уменьшение скорости вблизи поверхности цилиндра вследствие выполнения условия прилипания и формирование градиента скорости в пограничном слое. Б) Профили скорости Ux в сечениях, расположенных за квадратным цилиндром. Видно существенное искажение профиля скорости, наличие зоны замедления потока и формирование рециркуляционной области в следе за препятствием. C) Изменение продольной скорости Ux вдоль центральной линии канала. В области расположения цилиндра наблюдается резкое падение скорости, а за препятствием — постепенное восстановление профиля потока по мере удаления от зоны возмущения.

На рисунке 5 представлено распределение поперечной компоненты скорости Uy в различных сечениях расчётной области при Re=250.

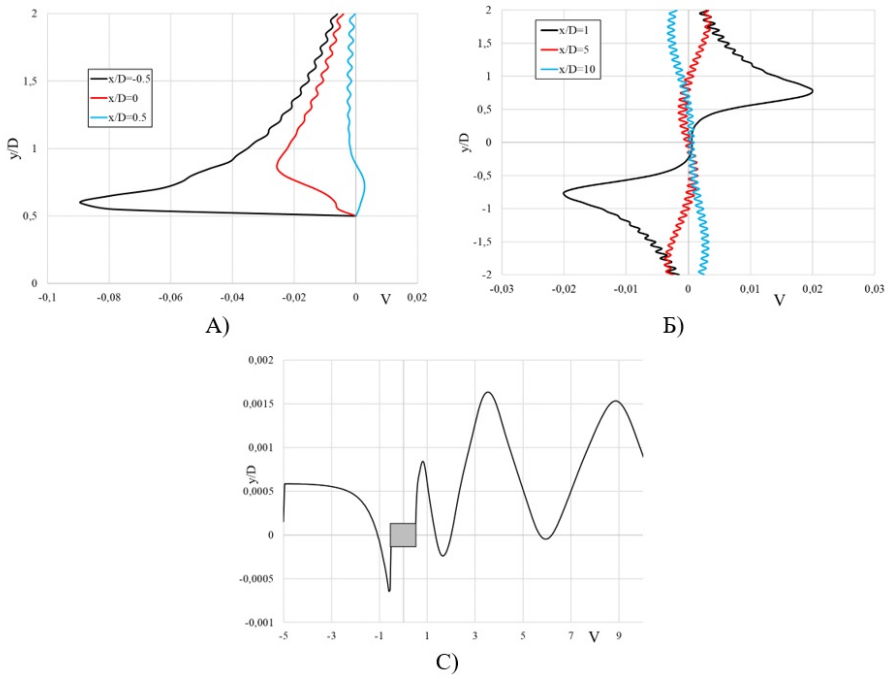


Рис. 5 Распределение поперечной компоненты скорости Uy=V в различных сечениях.

A) Профили поперечной скорости Uy в вертикальных сечениях, расположенных вблизи верхней части квадратного цилиндра. Перед препятствием значение Uy близко к нулю, что соответствует направлению основного потока. Вблизи поверхности цилиндра наблюдается отклонение потока и формирование локальных максимумов и минимумов поперечной скорости, обусловленных обтеканием острых кромок. Б) Распределение Uy в сечениях, расположенных за квадратным цилиндром. В следе за препятствием формируется знакопеременная структура поперечной скорости, свидетельствующая о развитии вихревой дорожки. Амплитуда колебаний постепенно уменьшается по мере удаления от цилиндра. C) Изменение поперечной компоненты скорости Uy вдоль центральной линии канала. В области расположения цилиндра наблюдается резкое изменение знака скорости, что указывает на возникновение зоны рециркуляции. Далее по потоку проявляются затухающие колебания, характерные для нестационарного вихреобразования.

На рисунке 6 представлено эволюция мгновенного векторного поля скорости и модуля скорости при обтекании квадратного цилиндра (Re=250) в различные моменты времени.

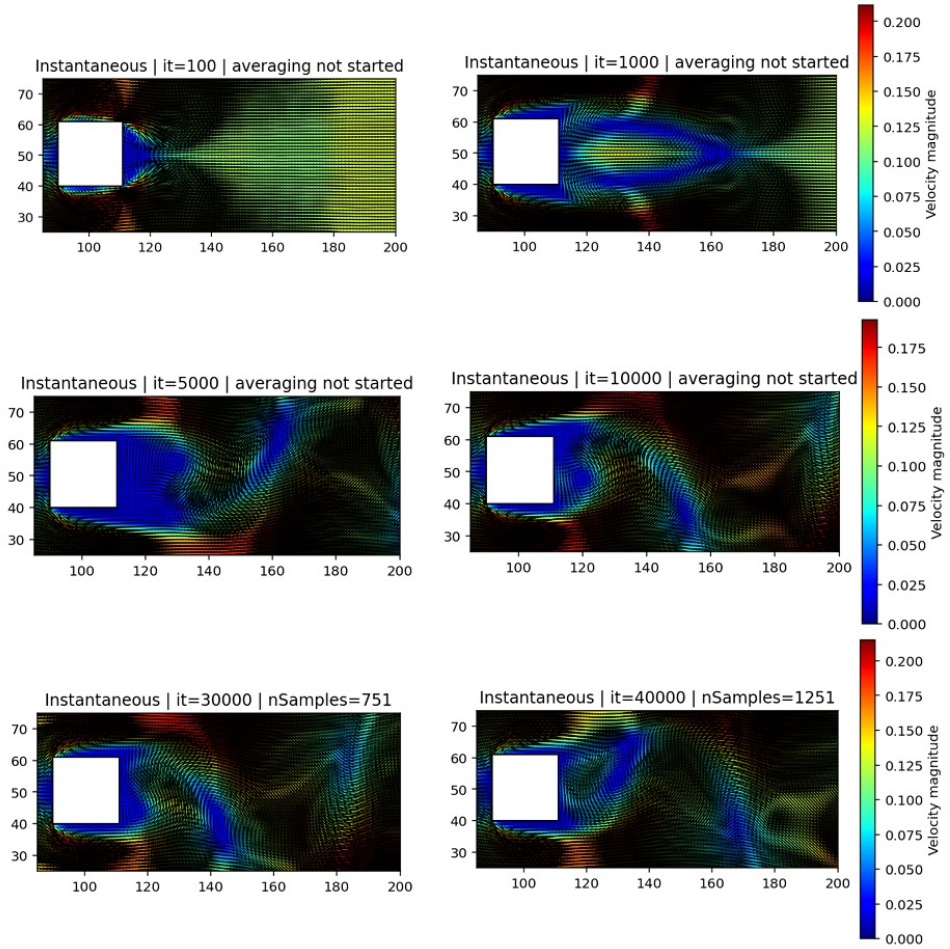


Рис. 6 Эволюция мгновенного векторного поля скорости и модуля скорости при обтекании квадратного цилиндра.

На начальном этапе расчёта (t=100) течение сохраняет квазисимметричный характер, за препятствием формируется начальная зона пониженной скорости. При увеличении времени (t=1000) наблюдается усиление деформации следа и появление первых признаков неустойчивости. На промежуточных стадиях (t=5000 и t=10000) происходит развитие вихревой структуры за квадратным цилиндром. Формируется чередующаяся система вихрей, характерная для вихревой дорожки Кармана. Поле скорости становится выраженно несимметричным. На установившейся стадии течения (t=30000 и t=40000) наблюдается устойчивый периодический режим с выраженным вихреобразованием. Амплитуда поперечных колебаний скорости увеличивается, а след за цилиндром приобретает регулярную волнообразную структуру

На рисунке 7 представлено изолинии усреднённых по времени полей скорости и давления при обтекании квадратного цилиндра (Re=250).

Верхний рисунок демонстрирует распределение усреднённой продольной компоненты скорости Ux. Перед цилиндром наблюдается зона пониженной скорости, обусловленная торможением потока, а за препятствием формируется вытянутая область

следа с пониженным значением Ux. По мере удаления от цилиндра профиль скорости постепенно восстанавливается.

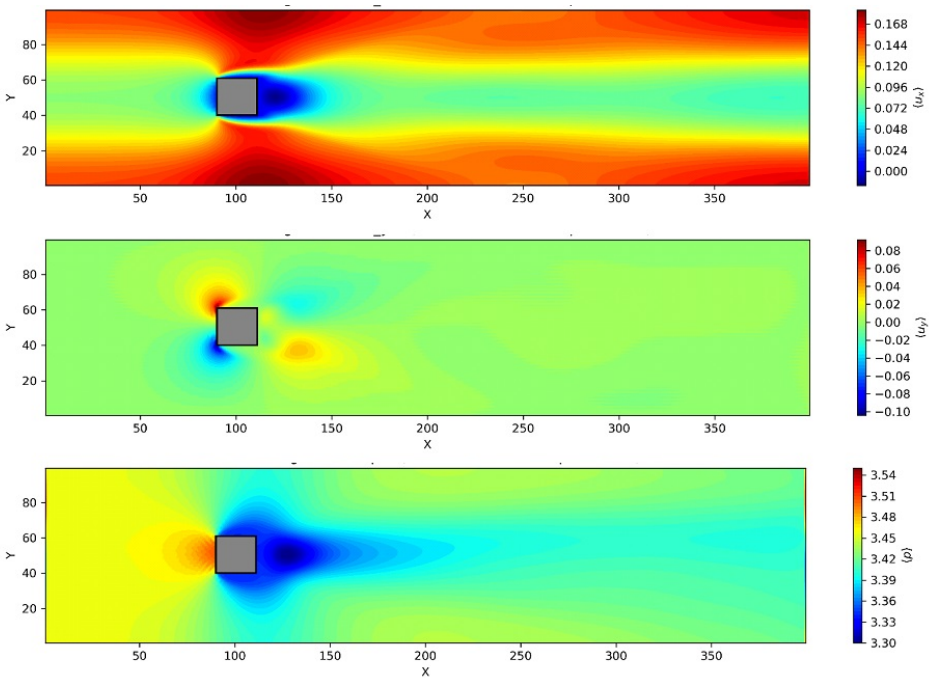


Рис. 7 Изолинии усреднённых по времени полей скорости и давления при обтекании квадратного цилиндра (Re=250).

Средний рисунок представляет изолинии усреднённой поперечной компоненты скорости Uy. В среднем по времени поле Uy близко к нулю вдали от цилиндра, однако вблизи препятствия сохраняются локальные области положительных и отрицательных значений, отражающие влияние периодического вихреобразования. Нижний рисунок иллюстрирует распределение усреднённого давления p. Перед цилиндром формируется область повышенного давления (зона торможения), тогда как за препятствием наблюдается пониженное давление в зоне следа. Такое распределение давления является характерным для обтекания тел с острыми кромками при переходном режиме течения. Полученные результаты показывают, что временное осреднение сглаживает мгновенные вихревые структуры, однако сохраняет интегральные характеристики течения — зону торможения перед телом, область пониженной скорости и давления в следе, а также симметричную структуру среднего потока.

На рисунке 8 представлено эволюция мгновенного поля скорости при обтекании квадратного цилиндра при числе Рейнольдса Re=10 в различные моменты времени.

Показано распределение модуля скорости и векторного поля потока в моменты времени Re=100, Re=1000, Re=5000 и Re=10000. На начальной стадии течения формируется зона пониженной скорости за препятствием. По мере развития процесса формируется симметричная область рециркуляции в следе за цилиндром. При данном значении числа Рейнольдса течение остается стационарным и симметричным, а вихревая дорожка Кармана не образуется. Поле скорости постепенно стабилизируется, а профиль скорости восстанавливается по мере удаления от препятствия.

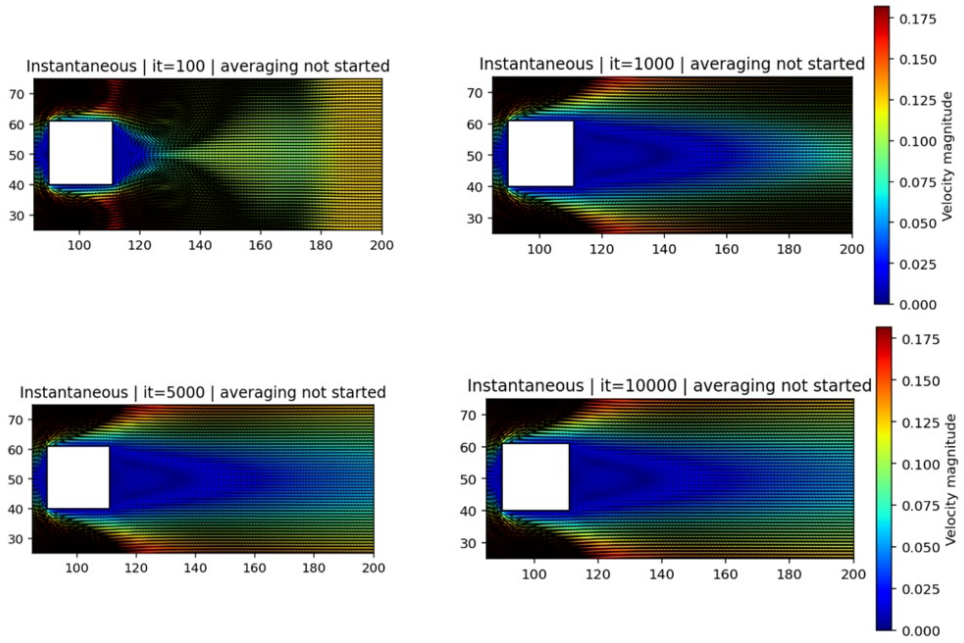


Рис. 8 Эволюция мгновенного поля скорости при обтекании квадратного цилиндра при числе Рейнольдса Re=10 в различные моменты времени.

4 Заключение

Проведённое численное моделирование обтекания квадратного цилиндра методом решётчатого Больцмана позволило проанализировать структуру течения при различных значениях числа Рейнольдса. Дополнительно были выполнены расчёты при Re = 10, что позволило провести сравнительный анализ режимов течения. Показано, что при Re = 10 течение носит стационарный и симметричный характер. За цилиндром формируется устойчивая зона рециркуляции без образования вихревой дорожки. При увеличении числа Рейнольдса до Re = 250 течение становится нестационарным, что приводит к формированию периодической вихревой дорожки Кармана и усилению поперечных колебаний скорости в следе за препятствием. Анализ мгновенных и усреднённых по времени полей скорости и давления подтвердил корректное воспроизведение основных физических особенностей течения, включая область повышенного давления перед цилиндром и зону пониженной скорости в следе. Полученные результаты демонстрируют, что метод LBM на основе модели D2Q9 с BGK-аппроксимацией является надёжным и вычислительно эффективным инструментом для моделирования задач гидро- и газодинамики со сложной геометрией препятствий и позволяет корректно описывать различные режимы течения при изменении числа Рейнольдса.

Литература

[1] *McNamara G.R., Zanetti G.* Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata // Physical Review Letters. – 1988. – Vol. 61, № 20. – P. 2332–2335.

[2] *Higuera F.J., Jiménez J.* Boltzmann approach to lattice gas simulations // Europhysics Letters. – 1989. – Vol. 9, № 7. – P. 663–668.

[3] *Qian Y.H., d'Humières D., Lallemand P.* Lattice BGK models for Navier–Stokes equation // Europhysics Letters. – 1992. – Vol. 17, № 6. – P. 479–484.

[4] *Chen S., Doolen G.D.* Lattice Boltzmann method for fluid flows // Annual Review of Fluid Mechanics. – 1998. – Vol. 30. – P. 329–364.

[5] *Succi S.* The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond // Oxford University Press, – 2001.

[6] *d'Humières D.* Generalized lattice Boltzmann equations // Rarefied Gas Dynamics: Theory and Simulations. – 1992. – P. 450–458.

[7] *He X., Luo L.-S.* Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the Navier–Stokes equations // Physical Review E. – 1997. – Vol. 56, №6. – P. 6811–6817.

[8] *Lallemand P., Luo L.-S.* Theory of the lattice Boltzmann method: Acoustic and thermal properties // Physical Review E. – 2000. – Vol. 61, №6. – P. 6546–6562.

[9] *Aidun C.K., Clausen J.R.* Lattice-Boltzmann method for complex flows // Annual Review of Fluid Mechanics. – 2010. – Vol. 42. – P. 439–472.

[10] *Krüger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A. et al.* The Lattice Boltzmann Method: Principles and Practice // Springer, – 2017.

[11] *Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M.* A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems // Physical Review. – 1954. – Vol. 94, №3. – P. 511–525.

UDC 532

APPLICATION OF THE LATTICE BOLTZMANN METHOD TO MODEL FLOW AROUND A SQUARE CYLINDER

[1*]***Madaliev M.E.***

*Madaliev.me2019@mail.ru ,m.e.madaliyev@ferpi.uz

[1]Fergana State Technical University, Fergana, Uzbekistan

This paper examines the application of the Lattice Boltzmann Method (LBM) to the numerical simulation of viscous incompressible fluid flow past a square cylinder. It is noted that, in studying the motion of liquids and gases, the kinetic LBM method, which offers a number of computational advantages for modeling complex flows, can be effectively applied alongside the classical approach based on solving the Navier–Stokes equations. The study aims to analyze the flow structure, velocity distribution, and the formation of vortex zones near an obstacle. Numerical implementation is based on a two-dimensional nine-velocity model (D2Q9) using the Python programming language. The paper presents the results of a computational experiment, including visualization of velocity fields, vector diagrams, and isolines. The obtained results demonstrate the effectiveness of the LBM method in solving fluid and gas dynamics problems and confirm its potential as an alternative to traditional methods based on the Navier–Stokes equations.

Keywords: Lattice Boltzmann method, LBM, numerical simulation, square cylinder, D2Q9 model.

Citation: Madaliev M.E. 2026. Application of the lattice Boltzmann method to model flow around a square cylinder. *Problems of mechanics.* 1(35): 119-128.

UDC 532

NUMERICAL SIMULATION OF LAMINAR HEAT AND MASS TRANSFER IN A CYLINDRICAL CHANNEL USING A MODIFIED SIMPLE ALGORITHM

[1,2]***Hamdamov M.M.,*** [1,2]***Ravshanov Sh.A.,*** [1,3]***Chulliev Sh.I.***

[1]mmhamdamov@mail.ru

[1]Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T. Urazbaev, Uzbekistan Academy of Sciences;

[2]University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Tashkent, Uzbekistan;

[3]University of Journalism and Mass Communications of Uzbekistan

In this study, a numerical simulation of the laminar flow of the fluid in the cylindrical pipe was performed. A semi-implicit numerical method or technique was used to examine this process. Specifically, to solve this problem, we are using the full Navier-Stokes equations expressed in cylindrical coordinates and modifying the SIMPLE algorithm to compute all the pressure-linked equations. To perform our analysis, three of the most critical thermophysical parameters in the entrance region (i.e., dynamic viscosity, specific heat capacity, and thermal conductivity) were evaluated separately under both constant and variable thermophysical conditions. The two-dimensional, time-dependent nature of the considered process necessitated the use of third-kind boundary conditions to accurately represent our physical problem. The use of third-kind boundary conditions allowed us to account for the effects of the ambient temperature, external wind velocity, and the most important geometric and physical parameters of the pipe. From the numerical results obtained using our numerical solution procedure, the velocity field, pressure distribution, surface friction coefficient, and temperature distribution were determined at various cross-sectional locations of the pipe. The results obtained from this study have significant practical and scientific importance for two reasons. First, the results provide an overall assessment of how the internal flow of our fluid behaves in terms of hydrodynamics and thermal dynamics. Second, these results provide a deeper understanding of heat and mass transfer processes and improve their predictive capabilities, thereby enabling the refinement of design and operational quality control processes for pipeline systems.

Keywords: mathematical modeling, heat and mass transfer, Poiseuille flow, SIMPLE algorithm, Navier–Stokes equations, pipeline flow

Citation: Hamdamov M.M., Ravshanov Sh.A., Chulliev Sh.I. 2026. Numerical Simulation of Laminar Heat and Mass Transfer in a Cylindrical Channel using a Modified SIMPLE Algorithm. *Problems of mechanics.* 1(35): 129-141.

1 Introduction

In regard to laminar flow through pipes, internal flow in cylinder-shaped pipes is an incredibly important aspect of energy engineering, chemical and oil/gas production, thermal systems, and the design and development of products using these systems. The analysis of the flow fields created within cylindrical pipe systems assists with developing comprehension regarding the mechanisms involved in generating velocity profiles, pressure fields, and temperature distributions throughout various cross-sections of the pipe system, which ultimately provides a means to quantify and improve the performance or efficiency of an entire engineering system through controlling the rate of heat transfer. Of particular

importance is the entrance region of cylindrical pipes' fluid flow, which is one of the most complicated regions of fluid flow from the perspective of hydrodynamic and thermal processes because the velocity and temperature profiles develop within this region; thus, investigating this area will be essential from a theoretical and practical point of view to evaluate the loss of energy causes (i.e., hydraulic loss, a drop in pressure, surface friction and heat transfer rate). These processes can be optimised and designed by mathematical modeling to have better performance and maintenance of the machines. Since it was first studied by Graetz and Nusselt [1, 2], the classical Graetz-Nusselt problem has been widely investigated. Precise results are obtained from an infinite series of Bessel functions that converge slowly and are challenging to use in practical applications, particularly near the channel entrance. Simple approximate techniques, such as those obtained by Tsoi using Laplace transforms and the Bubnov-Galerkin technique [4], offer fair agreement with experiment and are confined to low-order approximations. The curved channels are also found to enhance heat transfer due to secondary flows induced by centrifugal force and pressure gradients. Initial experimental experiments introduced by Dean [5], Williams et al. [6] and Grindley and Gibson [7] exhibited the development of secondary flow, but recent numerical research [11–19] investigated curvature, rotation and geometry complexity with clear evidence of increased thermal performance. Regardless of these developments, the current models either rely on low-order approximations, are configured for a particular geometry, or require substantial computation to accurately make predictions. This paper presents the design of a new model that integrates analysis and numerical methods to provide a versatile, high-precision formulation of laminar flow in cylindrical channels with arbitrary boundary conditions. This method contrasts with previous ones; unlike previous studies, it provides detailed resolution of velocity and temperature profiles in both radial and axial directions simultaneously, while remaining computationally efficient. It considers convective and diffusive processes as well, allowing the prediction of heat and mass transfer performance over a very broad range of Reynolds, Prandtl, and Peclet numbers. This method is useful for enhancing the accuracy and applicability of laminar flow modelling and is also an effective engineering optimisation tool that produces solutions between simplified analytical simulations and full numerical CFD models.

2 Mathematical Model

The mathematical model of the problem is formulated in a cylindrical coordinate system, taking into account the axial symmetry of the domain (Figure 1).

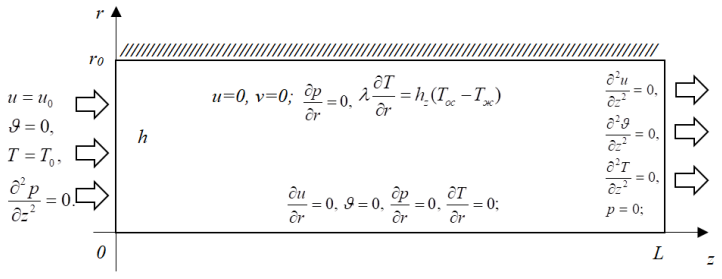


Figure 1 Geometry and Boundary Conditions of the Problem.

We establish a longitudinal coordinate along the flow axis z , measured from the in-let cross-section. We select a section length L that is much greater than the internal radius

r_0 of the pipeline. The radius r_0 is the upper limit of the radial coordinate r , which is measured from the flow axis . At the entrance to the section, the longitudinal velocity has a value of $u(0,r) = u_0$ and the radial velocity is zero – $\vartheta(0,r) = 0$ The entrance temperature is $T(0,r) = T_0$. On the flow axis, $(r = 0)$ the conditions of axial symmetry are formulated:

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial r} = 0, \qquad \vartheta(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial T(x,0)}{\partial r} = 0. \tag{1}$$

On the channel wall the liquid slows down, but heat transfer occurs:

$$u(x,r_0) = 0, \qquad \vartheta(x,r_0) = 0, \qquad \lambda \frac{\partial T}{\partial r} = h_z\,(T_{oc} - T(r_0)).$$

Here, λ is the heat transfer coefficient of the liquid. The heat transfer coefficient h_z is determined by taking into account the heat transfer of the liquid in the radial cross-section $r = r_0$ $(d = 2r_0)$ into the wall material, the heat transfer through the wall material, and the heat transfer from the wall to the surrounding environment:

$$(h_z)_{eff} = \frac{2\pi}{\frac{1}{r_0 h_0} + \frac{\ln\left((r_0+\delta)/r_0\right)}{\lambda_s} + \frac{1}{(r_0+\delta)h_1}}. \tag{2}$$

Here δ – pipeline wall thickness; λ_s – thermal conductivity coefficient of the pipe-line material. To calculate the value of the heat transfer coefficient from the liquid to the wall, the formula was used

$$h_0 = Nu_0 \frac{\lambda}{2r_0}. \tag{3}$$

Here the internal number Nu_0 is calculated using the Graetz-Nusselt formula [7–10]:

$$Nu_0 = 3.66 + \frac{0.0668\,(2r_0/x)\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}{1 + 0.04\left((2r_0/x)\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\right)^{2/3}}, \qquad T_{oc} = \text{const},\ \mathrm{Pr} \geqslant 5. \tag{4}$$

It is designed for a laminar flow of liquid at a constant ambient temperature and at Prandtl number values $\mathrm{Pr} \geqslant 5$. Here x is the length of the initial section

$$\mathrm{Re} = \frac{2r_0 u_0}{\nu}. \tag{5}$$

– Reynolds criterion (number) for fluid flow, v is kinematic viscosity of the fluid

$$\mathrm{Pr} = \frac{c_p \nu \rho}{\lambda}. \tag{6}$$

Prandtl criterion of liquid, c_p are specific heat capacity and ρ is the density of the liquid, which are taken as constant values. The values of the heat transfer coefficient from the pipeline walls to the environment were calculated using the formula

$$h_1 = Nu_1 \frac{\lambda_{aer}}{2(r_0 + \delta)}. \tag{7}$$

Here the external Nusselt number was determined according to the formula [7–10]:

$$Nu_1 = 0.3 + \frac{0.62\sqrt{\mathrm{Re}_{aer}}\,\mathrm{Pr}_{aer}^{1/3}}{\left[1 + (0.4/\mathrm{Pr}_{aer})^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{\mathrm{Re}_{aer}}{282000}\right)^{5/8}\right]^{4/5}. \tag{8}$$

Here, the Reynolds criterion for the environment is calculated as

$$\mathrm{Re}_{aer} = \frac{2(r_0 + \delta)u_{aer}}{\nu_{aer}}. \tag{9}$$

The external Nusselt formula, according to [1], is reliable for intervals $0.7 \leqslant Pr_{aer} \leqslant 500, \quad 1 \leqslant Re_{aer} \leqslant 10^6$

At the outlet section of the channel, smooth conjugation conditions were used:

$$\frac{\partial^2 u(L,r)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \vartheta(L,r)}{\partial z^2} = 0. \tag{10}$$

The participation of pressure in the equations of conservation of momentum in the longitudinal and radial directions in the first derivatives with respect to coordinates requires the formation of conditions for pressure with respect to coordinates. These were

$$\frac{\partial p(x,0)}{\partial r} = 0, \qquad p(L,r) = 0. \tag{11}$$

Here, the first condition reflects the symmetry of the flow relative to the flow axis, while the second condition is determined by the flow exiting into the atmosphere. Accordingly, this condition reflects zero excess fluid pressure at the exit to the atmosphere.

When implementing the SIMPLE method, an elliptic equation is first constructed for pressure, followed by a parabolic equation. This means that additional conditions are required for the pressure along the longitudinal and radial coordinates. These conditions include: the wall condition

$$\frac{\partial p(x,r_0)}{\partial r} = 0, \tag{12}$$

which follows from the equation of conservation of momentum along the radial coordinate, and the condition at the entrance to the channel

$$\frac{\partial^2 p(0,r)}{\partial z^2} = 0, \tag{13}$$

which corresponds to a smooth continuation of the pressure conjugation at the inlet.

The problem was solved using the equations of conservation of mass, momentum in two coordinates, and the amount of heat:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \\ \rho\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\dfrac{\partial u_z}{\partial r} + u_z\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial z} + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\mu(T)\, r\,\dfrac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\mu(T)\,\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right), \\ \rho\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\dfrac{\partial u_r}{\partial r} + u_z\dfrac{\partial u_r}{\partial z}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial r} + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\mu(T)\, r\,\dfrac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\mu(T)\,\dfrac{\partial u_r}{\partial z}\right) - \mu(T)\dfrac{u_r}{r^2}\right), \\ \rho c_v(T)\left(\dfrac{\partial T}{\partial t} + u_r\dfrac{\partial T}{\partial r} + u_z\dfrac{\partial T}{\partial z}\right) = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(T)\, r\,\dfrac{\partial T}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\,\dfrac{\partial T}{\partial z}\right)\right), \end{cases} \tag{14}$$

here $\mu(T)$ is the coefficient of dynamic viscosity of the liquid, $c_v(T)$ is the specific heat capacity of the liquid.

The system of equations under the stated boundary conditions was solved numerically in dimensionless variables. The pipeline radius r_0 , the flow velocity u_0 at the pipe-line

inlet, and the inlet T_0 fluid temperature were used as scale variables. In accordance with these, the time scale was taken to be r_0/u_0, and for the pressure, ρu_0^2.

In this case, the complete system of Navier-Stokes equations in dimensionless variables has the form:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\bar r}\dfrac{\partial(\bar r\bar\vartheta)}{\partial\bar r}+\dfrac{\partial\bar u}{\partial\bar z}=0, \\ \dfrac{\partial\bar u}{\partial\bar t}+\bar\vartheta\dfrac{\partial\bar u}{\partial\bar r}+\bar u\dfrac{\partial\bar u}{\partial\bar z}=-\dfrac{\partial\bar p}{\partial\bar z}+\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{1}{\bar r}\dfrac{\partial}{\partial\bar r}\left(\bar\mu\bar r\dfrac{\partial\bar u}{\partial\bar r}\right)+\dfrac{\partial}{\partial\bar z}\left(\bar\mu\dfrac{\partial\bar u}{\partial\bar z}\right)\right), \\ \dfrac{\partial\bar\vartheta}{\partial\bar t}+\bar\vartheta\dfrac{\partial\bar\vartheta}{\partial\bar r}+\bar u\dfrac{\partial\bar\vartheta}{\partial\bar z}=-\dfrac{\partial\bar p}{\partial\bar r}+\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{1}{\bar r}\dfrac{\partial}{\partial\bar r}\left(\bar r\bar\mu\dfrac{\partial\bar\vartheta}{\partial\bar r}\right)+\dfrac{\partial}{\partial\bar z}\left(\bar\mu\dfrac{\partial\bar\vartheta}{\partial\bar z}\right)-\bar\mu\dfrac{\bar\vartheta}{\bar r^2}\right), \\ \left(\dfrac{\partial\bar T}{\partial\bar t}+\bar\vartheta\dfrac{\partial\bar T}{\partial\bar r}+\bar u\dfrac{\partial\bar T}{\partial\bar z}\right)=\dfrac{1}{\bar r}\dfrac{\partial}{\partial\bar r}\left(\bar r\,\dfrac{1}{\mathrm{Re}\ \mathrm{Pr}(T)}\,\bar\mu\,\dfrac{\partial\bar T}{\partial\bar r}\right)+\dfrac{\partial}{\partial\bar z}\left(\dfrac{1}{\mathrm{Re}\ \mathrm{Pr}(T)}\,\bar\mu\,\dfrac{\partial\bar T}{\partial\bar z}\right), \end{cases} \tag{15}$$

here

$$\mathrm{Pr}(T)=\frac{\mu(T)C_v(T)}{\lambda(T)},\qquad \bar\mu=\frac{\mu(T)}{\mu}, \tag{16}$$

$$\mu(T)=2.414\times10^{\frac{247.8}{T-140}}-5,\qquad C_v(T)=4180+3.1(T-20),\qquad \lambda(T)=0.561+0.0019T. \tag{17}$$

2.2. Numerical method for solving the system of dimensionless full Navier-Stokes equations on the initial section of a cylindrical channel

To solve the problem, the following discretization parameters were selected. According to the dimensionless radial coordinate, the number of equally spaced nodes was $N_r+1=$ $=51$, according to the dimensionless longitudinal coordinate, the number of nodes was $N_z+1=201$, and according to the dimensionless time, the number of steps was $N_t=$ $=50000$.

The dimensionless steps were $\Delta t=0.005$, $\Delta z=1/N_z$, $\Delta r=1/N_r$. This choice ensures sufficient numerical mesh density in the radial and axial directions, while the small time step guarantees the stability and accuracy of the numerical solution.

When solving the hydrodynamic problem, we used the provisions of SIMPLE. For calculations in the new $n+1$-th in the time step we first find the intermediate values of the velocity components $\tilde u_{i,j}$ and $\tilde\vartheta_{i,j}$ according to the equations:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\tilde u_{i,j}^n}{\partial t}+\dfrac{\partial p_{i,j}^n}{\partial z}=\varphi_u(\tilde u,\tilde\vartheta), \\ \dfrac{\partial\tilde\vartheta_{i,j}^n}{\partial t}+\dfrac{\partial p_{i,j}^n}{\partial r}=\varphi_\vartheta(\tilde u,\tilde\vartheta) \end{cases} \tag{18}$$

where

$$\begin{aligned} \varphi_u(u,\vartheta)&=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)-\vartheta\frac{\partial u}{\partial r}-u\frac{\partial u}{\partial z}, \\ \varphi_\vartheta(u,\vartheta)&=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}\right)-\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial r}-u\frac{\partial\vartheta}{\partial z}. \end{aligned} \tag{19}$$

New components of the pressure gradient were taken into account in the second part of the calculation.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_{i,j}^{n+1}}{\partial t} + \dfrac{\partial p_{i,j}^{n+1}}{\partial z} = \varphi_u(\tilde{u}, \tilde{\vartheta}), \\ \dfrac{\partial \vartheta_{i,j}^{n+1}}{\partial t} + \dfrac{\partial p_{i,j}^{n+1}}{\partial r} = \varphi_\vartheta(\tilde{u}, \tilde{\vartheta}). \end{cases} \tag{20}$$

The right-hand sides of these equations were taken from the results of the previous calculation step. Zero coordinate velocities were assumed as the initial distributions, meaning the computational process begins with the fluid at rest.

Term-by-term subtraction of the last two systems allows us to obtain the dependencies

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i,j}^{n+1} - \tilde{u}_{i,j}^{n}}{\Delta t} + \dfrac{\partial\left(p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n}\right)}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\vartheta_{i,j}^{n+1} - \tilde{\vartheta}_{i,j}^{n}}{\Delta t} + \dfrac{\partial\left(p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n}\right)}{\partial r} = 0. \end{cases} \tag{21}$$

If we introduce a correction to the pressure $\delta p_{i,j} = p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n}$, then from the last system we can compose an elliptic equation with respect to it:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial \delta p_{i,j}}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \delta p_{i,j}}{\partial z^2} = -\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\tilde{\vartheta})}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\right), \tag{22}$$

where the unconditional fulfillment of the equation of conservation of mass was taken into account

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r\,\vartheta^{n+1})}{\partial r} + \frac{\partial u^{n+1}}{\partial z} = 0 \tag{23}$$

in the $n+1$-th time step.

Thus, to solve the hydrodynamic problem in the new $n+1$-th time step using known values $\tilde{u}_{i,j}^{n}$, $\tilde{\vartheta}_{i,j}^{n}$, and $p_{i,j}^{n}$ in stages:

- equations are solved for $\tilde{u}_{i,j}^{n}$ and $\tilde{\vartheta}_{i,j}^{n}$;
- the equation is solved for the pressure increment $\delta p_{i,j}$;
- an adjustment is made to the pressure: $p_{i,j}^{n+1} = \delta p_{i,j} + p_{i,j}^{n}$;
- corrections are made to the components of the velocity vector:

$$u_{i,j}^{n+1} = \tilde{u}i, j^{n} - \Delta t, \frac{\partial pi, j}{\Delta z}, \qquad \vartheta_{i,j}^{n+1} = \tilde{\vartheta}i, j^{n} - \Delta t, \frac{\partial pi, j}{\Delta r}. \tag{24}$$

Since the functions $\varphi_u(\tilde{u}\tilde{\vartheta})$ and $\varphi_\vartheta(\tilde{u}\tilde{\vartheta})$ are nonlinear, successive approximations are made until the process is established with a predetermined accuracy. Only then is the temperature field problem solved.

Let us dwell on the elements of the stages of solving a hydrodynamic problem.

To find intermediate values of longitudinal velocity, $0 < i < N_z$ a semi-explicit scheme was used:

$$\begin{gathered} \frac{\tilde{u}_{i,j} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} + \vartheta_{i,j}^{n}\frac{u_{i,j}^{n} - u_{i,j-1}^{n}}{\Delta r} + u_{i,j}^{n}\frac{u_{i,j}^{n} - u_{i-1,j}^{n}}{\Delta z} = -\frac{p_{i,j}^{n} - p_{i,j-1}^{n}}{\Delta z} \\ + \frac{1}{\mathrm{Re}\, r_j}\frac{\mu_{i,j+1/2} r_{j+1/2}\tilde{u}_{i,j+1} - 2r_j\mu_i\tilde{u}_{i,j} + r_{j-1/2}\mu_{i,j-1/2}\tilde{u}_{i,j-1}}{\Delta r^2} + \\ + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\mu_{i,j+1/2}u_{i+1,j}^{n} - 2\mu_{i,j}\tilde{u}_{i,j} + \mu_{i,j-1/2}u_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta z^2} \end{gathered} \tag{25}$$

in designations $r_j = j\Delta r, \quad r_{j\pm1/2} = (j \pm 1/2)\Delta r,$

$$\begin{gathered} a_j = \frac{\mu_{i,j+1/2}\Delta t}{\mathrm{Re}\,\Delta r^2}(1 + 0.5/j), \quad c_j = \frac{\mu_{i,j-1/2}\Delta t}{\mathrm{Re}\,\Delta r^2}(1 - 0.5/j), \\ b_j = 1 + \frac{2\Delta t\,\mu_{i,j}}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{\Delta z^2}\right), \\ d_j = -u^n_{i,j} + \vartheta^n_{i,j}\Delta t\frac{u^n_{i,j} - u^n_{i,j-1}}{\Delta r} + u^n_{i,j}\Delta t\frac{u^n_{i,j} - u^n_{i-1,j}}{\Delta z} + \frac{p^n_{i,j} - p^n_{i-1,j}}{\Delta z} - \\ -\frac{\Delta t}{\mathrm{Re}\,\Delta z^2}\left(\mu_{i,j+1/2}u^n_{i+1,j} + \mu_{i,j-1/2}u^{n+1}_{i-1,j}\right) \end{gathered} \tag{26}$$

for a recurrent formula

$$\tilde{u}^{n+1}_{i,j} = \alpha_j\,\tilde{u}^{n+1}_{i,j+1} + \beta_j \tag{27}$$

we receive

$$\alpha_j = \frac{a_j}{b_j - c_j\alpha_{j-1}}, \quad \beta_j = \frac{c_j\beta_{j-1} - f_j}{b_j - c_j\alpha_{j-1}}. \tag{28}$$

On the axis they accepted $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$. The condition was imposed on the boundaries $\tilde{u}_{i,N_r} = 0$. At the exit from the section (at $i = N_z$) the condition was used.

$$\tilde{u}^{n+1}_{N_z,j} = 2\tilde{u}^{n+1}_{N_z-1,j} - \tilde{u}^{n+1}_{N_z-2,j}. \tag{29}$$

It was considered sufficient to use the sweep method only along the radial coordinate. Similarly, we found the values $\tilde{\vartheta}_{i,j}$ taking into account the values of the coefficients

$$\begin{gathered} b_j = 1 + \frac{2\Delta t\,\mu_{i,j}}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{\Delta z^2}\right) + \frac{\Delta t\,\vartheta^n_{i,j}\,\mu_{i,j}}{\mathrm{Re}\,j^2\,\Delta r^2}, \\ d_j = -\vartheta^n_{i,j} + \Delta t\,\vartheta^n_{i,j}\frac{\vartheta^n_{i,j} - \vartheta^n_{i,j-1}}{\Delta r} + \Delta t\,u^n_{i,j}\frac{\vartheta^n_{i,j} - \vartheta^n_{i-1,j}}{\Delta z} + \frac{p^n_{i,j} - p^n_{i-1,j}}{\Delta r} - \\ -\frac{\Delta t}{\mathrm{Re}\,\Delta z^2}\left(\mu_{i+1/2,j}\,\vartheta^n_{i+1,j} + \mu_{i-1/2,j}\,\vartheta^{n+1}_{i-1,j}\right). \end{gathered} \tag{30}$$

At the boundaries for the radial velocity we took $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$, $\tilde{\vartheta}^n_{i,N_r} = 0$ and $\tilde{\vartheta}^{n+1}_{N_z,j} = 2\tilde{\vartheta}^{n+1}_{N_z-1,j} - \tilde{\vartheta}^{n+1}_{N_z-2,j}$.

The equations for the pressure increase were solved by the establishment method, for which a fictitious time was introduced t_0:

$$\frac{\partial\,\delta p}{\partial t_0} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\,\delta p}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\,\delta p}{\partial z^2} + \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,\tilde{\vartheta})}{\partial r} + \frac{\partial\,\tilde{u}}{\partial z}\right). \tag{31}$$

The integration step over t_0 was $\delta_t = 0.05$, and the superscript k denoted the ordinal number of the approximation. For $n = 1$, the previous approximation was taken to be $\delta p^0_{i,j} = 0$. For successive approximations at the boundaries, $i = 0$, $i = N_z$, $j = 0$ and $i = N_r$, the $n > 1$ values were $\delta p^0_{i,j}$ taken $\delta p^{k+1}_{i,j} = 0$ from the results of the previous step.

The sweep process for pressure increment was organized along the radial coordinate. The diagonal advantage of the coefficients was enhanced by the central term of the second derivative with respect to z.

The calculations for k were repeated until the condition was met

$$\max_{\{0<i<N_z\}=\{0<j<N_r\}}\left|\delta p^k_{i,j} - \delta p^{k+1}_{i,j}\right| < \varepsilon_{\delta p}. \tag{32}$$

The pressure values at the calculated nodes in the $n+1$-th time step were

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^{n} + \delta p_{i,j}^{k+1} \tag{33}$$

and the values of the components of the velocity vector

$$u_{i,j}^{n+1} = \tilde{u}_{i,j} - \Delta t \frac{\partial\, \delta p_{i,j}^{k+1}}{\Delta z}, \quad \vartheta_{i,j}^{n+1} = \tilde{\vartheta}_{i,j} - \Delta t \frac{\partial\, \delta p_{i,j}^{k+1}}{\Delta r}. \tag{34}$$

To determine the temperature field for the $n+1$-th time step, a running process was organized as in the processes of finding $\tilde{u}_{i,j}$ and $\tilde{\vartheta}_{i,j}$.

The time calculations continued until $N_t = 50000$ or when the largest deviations in the values of longitudinal and transverse velocities satisfied the conditions

$$\max_{i=\{1,N_z\}=j=\{0,N_r-1\}} \left|u_{i,j}^{n} - u_{i,j}^{n+1}\right| < \varepsilon_u, \quad \max_{i=\{1,N_z\}=j=\{1,N_r-1\}} \left|\vartheta_{i,j}^{n} - \vartheta_{i,j}^{n+1}\right| < \varepsilon_\vartheta. \tag{35}$$

3 Results

Figure 2 compares the longitudinal velocity profiles obtained using the developed method with the numerical results of the Comsol Multiphysics package. They relate to sections $\overline{x} = 5$ (curves 1 and 2) and $\overline{x} = 20$ (curve 3) and were obtained at Reynolds numbers $\mathrm{Re} = 1200$ (curves 1 and 3) and $\mathrm{Re} = 400$ (curve 3).

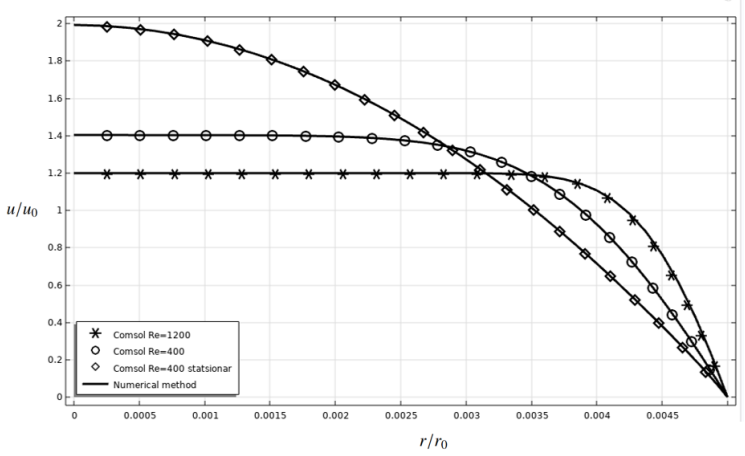


Figure 2 Comparison of the model results with Comsol Multiphysics simulations for axial velocity at various cross-sections.

Minor discrepancies are observed in the near-wall region between our code and Comsol Multiphysics results, with our results slightly lower than the software predictions. Refining the time step and increasing numerical accuracy improved the agreement, but did not fully eliminate the difference. This is likely due to the use of a non-conservative form of the momentum conservation equations in the coordinate directions. At the outlet section (diamonds), the axial velocity matches well with the classical quadratic Poiseuille profile.

$$u(r) = u_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \tag{36}$$

In the laminar regime, the hydraulic resistance coefficient is inversely proportional to the Reynolds number and is determined by the following expression:

$$f = \frac{64}{\mathrm{Re}}. \tag{37}$$

The friction coefficient used in the calculations is equal to:

$$\tau = \frac{f}{4}\bigg|_{r=r_0} \tag{38}$$

The wall shear stress in the pipeline is determined using the following formula:

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\bigg|_{r=R} \tag{39}$$

In dimensionless form, this expression can be written in terms of the Reynolds number:

$$\tau = \frac{2}{\mathrm{Re}} \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\bigg|_{r=R}. \tag{40}$$

This formula was employed to determine the interaction between the flow and the wall and hence the energy loss involved later. Figure 3 shows a comparison of the dimensional reduction of the shear stress of the wall that our algorithm, ANSYS Fluent and the Poiseuille formula give. The computations indicate that, the dimensionless wall shear stress is reduced in the fully developed entrance region approaching the theoretical solution. The shear stress is nearly seven times more at the inlet section than it had been analytically determined in the main section. In case of Reynolds numbers of 400, 800, and 1000, the respective shear stress of the inlet was 0.2, 0.1, and 0.08 respectively.

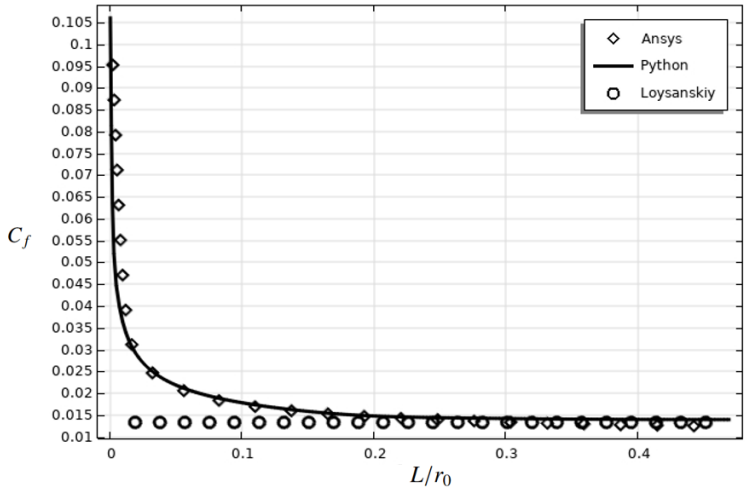


Figure 3 Comparison of friction coefficients on the pipe inner surface obtained from the model and ANSYS Fluent.

This equation was used to establish how the flow and the wall interacted and consequently the energy loss that they deposited in the future. Figure 4 will compare the dimensional reduction of shear stress of the wall provided by our algorithm ANSYS Fluent

and Poiseuille formula. The calculations show that, dimensionless wall shear stress is lower in the fully established entrance region towards theoretically derived solution. The shear stress is almost seven times greater than the one as it had been calculated analytically in the main section. He did the experiment using Reynolds numbers of 400, 800 and 1000 and the inlet shear stress was 0.2, 0.1 and 0.08 respectively The trends obtained in the characteristic variation of pressure (Figure 5) are a reproduction of the earlier findings. And constant property values had the same results at different Prandtl numbers (Figure 5). Nonetheless, pressure drop decreased when it comes to variable kinematic viscosity, specific heat and thermal conductivity. Under these conditions the velocity profiles are slower to adjust resulting in reduced loss of pressure. The model curve has close results between the Comsol Multiphysics results in the central area and in the transitional area. Any slight inconsistency close to the wall where Comsol Multiphysics on the left with marginally smaller values is also possible to be explained by the fact that this area is sensitized to mesh and boundary conditions and to the high temperature gradient. All in all, the findings provide a high level of correspondence between the model and Comsol Multiphysics and testify the validity of the model and its capability to describe radial heat transfer in a sensible and reliable manner (Figure 6). Figure 7 gives a comparison

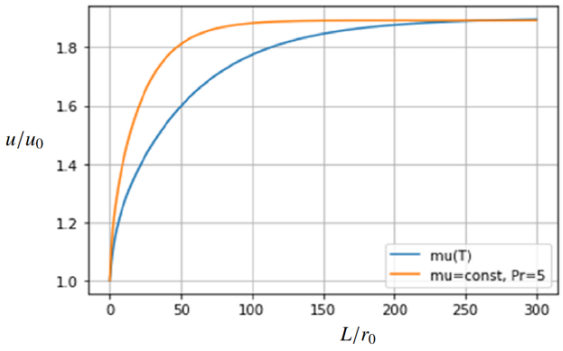


Figure 4 Re = 400, velocity profiles.

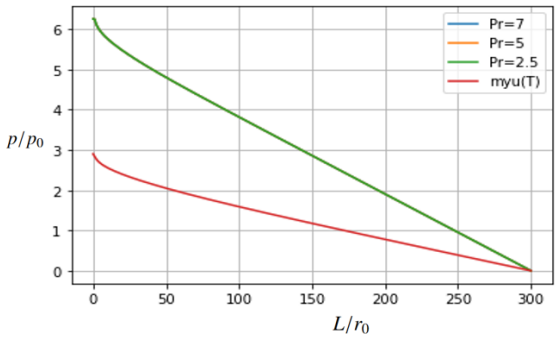


Figure 5 Re = 400, Pressure distribution.

of the temperature development at the center of the pipe obtained through the developed numerical algorithm written in python and the simulation obtained through COMSOL Multiphysics. As can be seen, the COMSOL Multiphysics output is oscillatory at the early stages of heat propagation of the transient (nonstationary) regime. Conversely, the curves obtained in the proposed solution algorithm do not exhibit these oscillations and their evolution in temperature exists in a more stable and smooth way. Moreover, where oscillations are not present the COMSOL Multiphysics results are almost identical to the results generated by the proposed model with an absolute overlap in the curves. This confirms the validity and soundness of the numerical method developed to explain heat transfer in the centre of the pipe. The mathematical model therefore can be used to determine temperature and flux of the flow, assess the efficiency of heat transfer, and assess the mass transfer in the laminar conditions of flow.

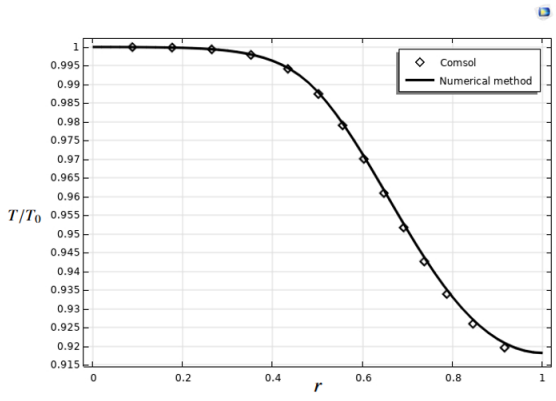


Figure 6 Radial temperature distribution Re = 400.

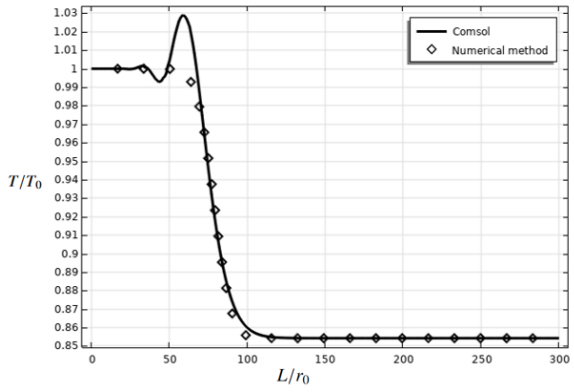


Figure 7 Comparison of the temperature variation Re = 400.

4 Discussion

This study shows that the developed model reliably captures the main features of smooth flow and heat transfer in round channels. Comparing it with Comsol Multiphysics simulations shows close agreement in temperature and speed patterns, confirming the model's accuracy in representing key flow behavior.

The study of wall friction and resistance shows the model accurately captures the opposite relationship between flow resistance and Reynolds number in smooth flow. Changes in fluid properties, like thickness and heat transfer ability, slightly slow down the formation of speed patterns, which lowers the pressure drop and shows the thermal boundary layer's role in flow development. Also, the flow speed near the entrance matches the classic curved Poiseuille profile, confirming the model represents both the start and fully developed flow well.

We also looked at how temperature affects flow speed and pressure, finding that changes in fluid properties and heat conditions can greatly affect flow behavior. Overall, these results support the modeling method, showing it can predict flow patterns, heat transfer, and energy losses in smooth flow. This work provides a strong base for improving round channel designs and can be expanded to study more complex shapes, different fluid properties, or changing flow conditions in future research.

5 Conclusions

In typical heat transfer problems in fluids, the Prandtl number (Pr) is often assumed constant, which limits the representation of the process and neglects the effect of temperature-dependent viscosity (μ) on local Reynolds number (Re). In this study, the proposed solution algorithm accounts for temperature-dependent fluid properties, including $\mu(T)$, $C_v(T)$ and $k(T)$ for an incompressible Newtonian fluid.

The results demonstrate that incorporating temperature-dependent properties provides a more accurate representation of flow and heat transfer compared to approaches assuming constant Pr. The model successfully captures the influence of variable viscosity, specific heat, and thermal conductivity on velocity profiles, temperature distribution, wall shear stress, and pressure drop. This approach allows for a reliable prediction of laminar flow dynamics and energy transport under conditions where fluid properties vary with temperature.

Overall, the developed methodology offers a robust and efficient tool for analyzing laminar flow with heat transfer in cylindrical channels. It provides a solid foundation

for optimizing channel designs and can be extended to study more complex geometries, transient flow conditions, and fluids with temperature-dependent properties in future research.

References

[1] L. Graetz 1885. *Ueber die Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten.* // *Annalen der Physik*. Vol. 254, no. 7. pp. 337–357.

[2] W. Nusselt 1910. *Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge* // *Z. Ver. Deut. Ing.*. Vol. 54. pp. 1154–1158.

[3] A.V. Fafurin, E.A. Fafurina 2011. *Kinematic structure of swirling flow* // *Bulletin of Kazan Technological University*. Vol. 14. pp. 43-46.

[4] S.V. Ananikov 2012. *Temperature field during fluid flow in a semi-infinite prismatic channel of triangular cross-section (boundary conditions of the first kind)* // *Bulletin of Kazan Technological University*. Vol. 6. pp. 147-150.

[5] L. N. Rubtsova, L. Yu. Aleksandrova, P. G. Ganin, A. V. Markova, A. I. Moshinsky, V. V. Sorokin 2022. *Study of laminar flow in prismatic channels of rectangular and elliptical cross-section* // *ChemChemTech*. Vol. 65, No. 4. doi: `http://dx.doi.org/10.6060/ivkkt.20226504.6533`.

[6] J. Happel 2016. *Hydrodynamics at Low Reynolds Numbers* // *Moscow: Mir*. 632 p.

[7] A.I. Moshinsky 2017. *Dimensionality Theory in Problems of Chemical Engineering* // *Lambert Academic Publ. RU*. 94 p.

[8] E.M. Abbasov, S.A. Imamaliev 2014. *Mathematical modeling of two-phase fluid motion in concentrically located communicating pipes* // *Eng. Phys. J.*. Vol. 87, No. 6.

[9] Yu.G. Chesnokov 2017. *New formulas for calculating the characteristics of liquid or gas flow in a pipe of circular cross-section* // *Eng.-Phys. J.*. Vol. 90, No. 4. pp. 1005-1011.

[10] Nor Haziq Naqiuddina, Lip Huat Sawa, Ming Chian Yewa et al. 2018. *Overview of micro-channel design for high heat flux application* // *Renew. Sust. En. Rev.*. Vol. 82. pp. 901–914.

[11] R. R. Yulmukhametova, A. A. Musin, L. A. Kovaleva 2021. *Numerical modeling of laminar suspension flow in a flat channel* // *Bulletin of Bashkir University*. Vol. 26, No. 2. doi: `http://dx.doi.org/10.33184/bulletin-bsu-2021.2.2`.

[12] E.P. Valueva, M.S. Purdin 2015. *Pulsating laminar flow in a rectangular channel* // *Thermophysics and Aeromechanics*. Vol. 22, No. 6.

[13] A. A. Gavrilov, A. V. Minakov, A. A. Dekterev, V. Ya. Rudyak 2010. *Numerical algorithm for modeling laminar flows in an annular channel with eccentricity* // *Siberian Journal of Industrial Mathematics*. Vol. 13, Issue 4. pp. 3–14.

[14] I. Girgin, M. Turker 2011. *Axial heat conduction in laminar duct flows* // *J. Naval. Sci. Eng.*. Vol. 7, No. 2. pp. 30–45.

[15] I. Khujaev, M. Hamdamov, S. Ravshanov 2025. *Numerical study of heat and mass transfer in a relief pipeline with variable diameter* // *Mathematical Models in Engineering*. Vol. 11, No. 4. pp. 243–258. doi: `http://dx.doi.org/10.21595/mme.2025.25173`.

[16] I. Khujaev, Z. Shirinov, Sh. Ravshanov 2025. *Mathematical Model and Calculation Algorithm Modern Heat Exchanger Connected to a Two-Pipe Heating Network* // *AIP Conf. Proc.*. 3265, 060007. doi: `http://dx.doi.org/10.1063/5.0267610`.

[17] Sh. Ravshanov, Kh. Aminov, N. Rahmonova 2025. *Simulation of Flow Dynamics in a Gas Network Pipe* // *AIP Conf. Proc.*. 3265, 060007. doi: `http://dx.doi.org/10.1063/5.0265131`.

[18] J.O. Takhirov, M.I. Boborakhimova 2024. *On the mathematical model of the concentration of pollutants and their impact on the population of the river* // *Results in Applied Mathematics*. Vol. 21. 100414. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.rinam.2023.100414.

[19] A.R. Hayotova, S.S. Babaev, B. Boytillayev 2025. *The numerical solution of an Abel integral equation by the optimal quadrature formula* // *Results in Applied Mathematics*. Vol. 25. 100542. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.rinam.2025.100542.

УДК 532

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАМИНАРНОГО ТЕПЛОМАССООБМЕНА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ НА ОСНОВЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО АЛГОРИТМА SIMPLE

[1,2] ***Хамдамов М.М.,*** [1,2] ***Равшанов Ш.А.,*** [1,3] ***Чуллиев Ш.И.***

[1]mmhamdamov@mail.ru

[1]Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева, Ташкент;

[2] Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий

[3]Университет журналистики и массовых коммуникаций Узбекистана

В данной работе проведено численное моделирование ламинарного течения жидкости в горизонтальной цилиндрической трубе. Для исследования процесса использован полунеявный численный метод. В частности, решение задачи базируется на полных уравнениях Навье-Стокса в цилиндрических координатах, а для расчета уравнений, связанных с давлением, применена модифицированная версия алгоритма SIMPLE.

В ходе анализа отдельно оценивалось влияние трех критических теплофизических параметров на начальном участке трубы: динамической вязкости, удельной теплоемкости и теплопроводности, рассматриваемых как в постоянном, так и в переменном состояниях. Двумерный и нестационарный характер исследуемого процесса обусловил использование граничных условий третьего рода для адекватного отражения физической постановки задачи. Это позволило учесть влияние температуры окружающей среды, скорости внешнего ветра, а также ключевых геометрических и физических характеристик трубопровода.

На основе полученных численных результатов определены поля скоростей, распределение давления, коэффициенты поверхностного трения и температурные профили в различных сечениях трубы. Результаты исследования имеют важное научно-практическое значение: во-первых, они дают комплексную оценку гидродинамического и теплового поведения внутреннего потока жидкости; во-вторых, способствуют более глубокому пониманию процессов тепломассопереноса и повышению точности их прогнозирования, что позволяет оптимизировать проектирование и контроль качества эксплуатации трубопроводных систем.

Ключевые слова: математическое моделировани, тепломассоперенос, течение Пуазёйля, алгоритм SIMPLE, уравнения Навье–Стокса, течение в трубопроводе

Цитирование: *Хамдамов М.М., Равшанов Ш.А., Чуллиев Ш.И.* Численное моделирование ламинарного тепломассообмена в цилиндрическом канале на основе модифицированного алгоритма SIMPLE // Проблемы механики. – 2026. – №1(35). – С. 129-141.

УДК 624.131(175)

ДЕФОРМИРУЕМОСТЬ СУГЛИНКОВ, СЛАГАЮЩИХ ТЕЛО СЕВЕРНОЙ ДАМБЫ МЕЖДУРЕЧЕНСКОГО ВОДОХРАНИЛИЩА ПРИ ТРЕХОСНОМ СЖАТИИ

[1]***Аимбетов И.К.***, [2]***Аимбетов К.Ш.***

[1]izzet_chf@mail.ru, [2]aimbetovkamalatdiyin@gmail.com

Каракалпакский научно-исследовательский институт естественных наук Каракалпакского отделения Академии наук Республики Узбекистан, г. Нукус

Приводятся результаты испытаний суглинков, слагающих тело северной дамбы Междуреченского водохранилища при трехосном сжатии. Для оценки влияния начальной плотности суглинка были испытаны образцы грунта при значениях начального коэффициента пористости 0.55; 0.65; 0.75. Испытания образцов были проведены при влажности 20% и водонасыщенном состоянии при кинематической схеме нагружения. Установлены экспериментальные зависимости значения модуля деформации от начальной плотности при влажности 20% и водонасыщенном состоянии образцов. Установлены экспериментальные закономерности объемных деформаций от гидростатического давления. Результаты исследований можно использовать при проектировании и эксплуатации земляных плотин в Муйнакском районе Каракалпакстана.

Ключевые слова: Суглинок, насыпная плотина, трехосное сжатие, Муйнакский район.

Цитирование: *Аимбетов И.К., Аимбетов К.Ш.* Деформируемость суглинков, слагающих тело северной дамбы Междуреченского водохранилища при трехосном сжатии // Проблемы механики. – 2026. – № 1(35). – С. 142-149.

1 Введение

В конце 1970 года на основе проектного Института «Узгипроводхоз» началось создание Междуреченского водохранилища в центре дельты Амударьи. На протоке Акдарьи была построена дамба Шуак, направляя воду Амударьи по протокам Кипчак и Акдарья в зону мелких озер Шегекуль, Коксу, Кошпелядин, Балтакеткен, Аутель, Ногай, Жиделиузяк. Вдоль протоки Кипчакдарья были построены западная и северная дамбы, вдоль русла Акдарьи построена восточная дамба, благодаря чему в 1978 году возникло Междуреченское водохранилище [5, 10].

27 января 2000 года Нукусский филиал Исполнительного комитета Международного фонда спасения Аральского моря (МФСА) заключил контракт с проектным Институтом «Узгипромелиоводхоз» на разработку ТЭО первой очереди проекта «Создание малых локальных водоемов по береговой линии моря в дельте Амударьи». Основным назначением создания водоемов в дельте р. Амударьи является оздоровление экологической обстановки, обеспечение инженерного регулирования водной системы, сохранение биоразнообразия и повышение естественной продуктивности биоресурсов Приаралья [5, 10].

Междуреченское водохранилище представляет собой ёмкость для регулирования и управления водоподачей в Муйнакское и Рыбачье водохранилища, а также в озеро Майпост и реку Акдарья. С целью аккумулирования воды в Междуреченском водохранилище объемом до 440 млн. м^3 при отметке нормального подпорного уровня (НПУ) 57.0, гребень северной и восточной дамб запроектирован на отметке 59.0 [5].

В целях оценки состояния бетонных тетраэдров и тела северной дамбы в мае 2024 года было обследовано тело и бетонное покрытие, которые включали визуальное обследование бетонного покрытия, отбор проб грунтов и лабораторное определение физико-механических показателей грунтов тела плотины. Исследования показали, что тело северной дамбы построено суглинками твердой консистенции плотностью 1.79-1.88 г/см^3, а бетонные тетраэдры, защищающие плотину от волнового давления воды, разрушены из-за агрессивного воздействия солей [2]. Физические показатели суглинка, отобранного из тела плотины, представлены в таблице.

Таблица

Физические показатели суглинка тела северной дамбы Междуреченского водохранилища

Влажность, %			Плотность, г/см^3			Число пластичности I_p, %	Показатель текучести I_L д.е.	Коэф. водонасыщения S_r д.е.
Естественная W	На границах		Естественного грунта ρ	Частиц грунта ρ_s	Сухого грунта ρ_d			
	Текучести W_L	Раскатывания W_p						
$e = 0{,}622$								
11.8	24.2	19.3	1.79–1.88	2.67	1.65	12.6	-0.60	0.51

Для надежной эксплуатации Междуреченского водохранилища необходимо оценить напряженно-деформированное состояние тела плотины при заполнении водохранилища. Для расчета напряженно-деформированного состояния плотины при заполнении водой необходима информация о механических показателях грунтов тела плотины.

2 Методика исследований

Известно, что наиболее точно механические показатели грунтов (модуль деформации, угол внутреннего трения и удельное сцепление) можно определить методом трехосного сжатия с использованием стабилометров, поскольку при испытаниях грунтов в стабилометре в грунтовом образце создается напряженное состояние, близкое к природному напряженному состоянию. В целях оценки влияния начальной плотности суглинка на механические показатели суглинистого грунта испытания проводились при значениях начального коэффициента пористости (0.55; 0.65; 0.75). Плотность образцов была сформирована из проб грунта нарушенной структуры. При этом формирование образцов осуществлялось при влажности грунта 20%, которая является оптимальной влажностью для уплотнения грунтов.

Испытания по определению механических характеристик грунтов тела плотины были проведены в приборах трехосного сжатия фирмы ГЕОТЕК (Россия). Испытания суглинков осуществлялись по консолидировано-дренированной схеме испытаний при влажности 20% и водонасыщенном состоянии суглинка. Испытания проводились по кинематической схеме испытаний, т.е. первоначально осуществлялось гидростатическое обжатие образца до условной стабилизации объемных деформаций, затем по кинематической схеме осуществлялось девиаторное нагружение (со скоростью 0.016 мм/мин.) до разрушения образца. Испытания проводились при значениях гидростатического давления 100; 200 и 300 кПа [9].

В целях оценки влияния водонасыщения на механические показатели суглинка испытания были проведены в водонасыщенном состоянии по аналогичной схеме нагружения образцов. Водонасыщение образца проводилось после формирования образца и заполнения камеры стабилометра водой. После водонасыщения суглинистого образца осуществлялось гидростатическое обжатие. После стабилизации объемных деформаций по кинематической схеме осуществлялось вертикальное нагружение образца со скоростью 0.016 мм/мин. до разрушения образца.

3 Результаты и обсуждение

На рис. 1 представлен характер разрушения образцов при гидростатическом давлении 100 кПа и коэффициенте пористости e=0.75. Следует отметить, что при всех значениях гидростатического давления характер разрушения образцов влажностью 20% был практически одинаковым, т.е. разрушение образца происходило по наклонной плоскости относительно боковой поверхности. Характер разрушения образцов в водонасыщенном состоянии имел бочкообразную форму.



Влажности, 20%.
Коэффициент пористости, $e = 0.75$;
Плотность – 1.86 г/см^3;
гидростатическое давление 100 кПа



Водонасыщенное состояние.
Плотность до водонасыщения – 1.86 г/см^3;
коэффициент пористости, $e = 0.75$;
гидростатическое давление 100 кПа

Рис. 1 Характер разрушения образцов при влажности 20% и при водонасыщении

На рис. 2, 3 представлены графики, описывающие зависимости вертикальных деформаций от девиаторных напряжений (начальный коэффициент пористости суглинка 0.55:0.75), которые показывают, что зависимости вертикальных деформаций от девиаторного давления имеют нелинейный характер и зависят от значения гидростатического давления. По начальным участкам, близким к линейной, по следующей формуле были определены значения модуля деформации суглинка [9].

$$E = \sigma_z/\varepsilon_z. \tag{1}$$

где σ_z – вертикальное (девиаторное) напряжение, МПа; ε_z – вертикальная деформация.

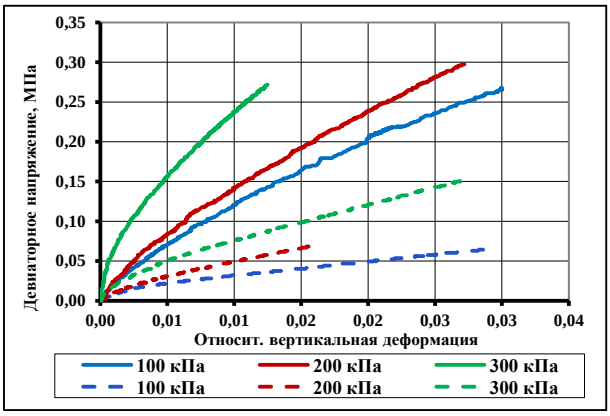


Рис. 2 Зависимости девиаторных напряжений от относительных вертикальных деформаций: ——— при влажности 20%; - - - - - при водонасыщении (начальный коэффициент пористости суглинка 0.55).

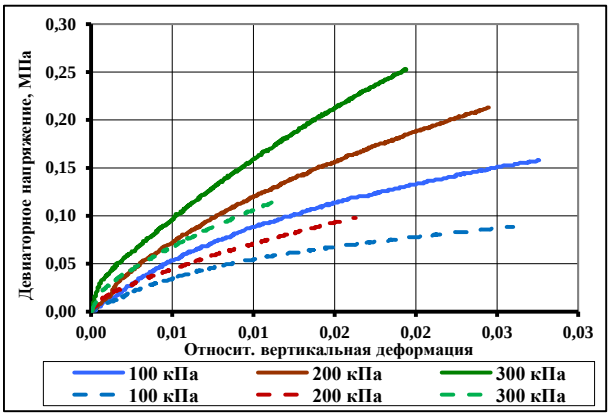


Рис. 3 Зависимости девиаторных напряжений от относительных вертикальных деформаций: ——— при влажности 20%; - - - - - при водонасыщении (начальный коэффициент пористости суглинка 0.75).

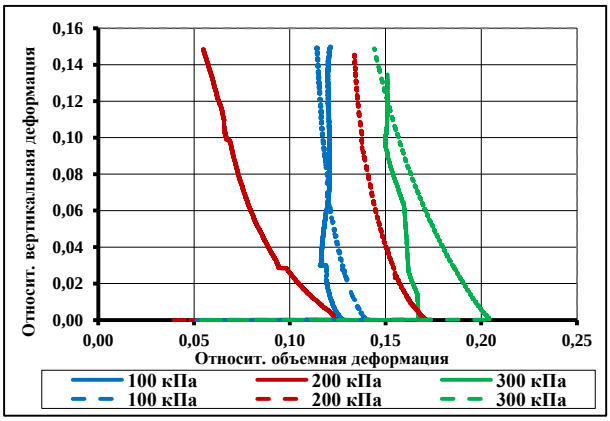


Рис. 4 Зависимости относительных вертикальных деформаций от относительной объемной деформации: ——— при влажности 20%; - - - - - водонасыщенное состояние (начальный коэффициент пористости суглинка 0.55).

На рис. 4, 5 представлены экспериментальные графики, описывающие зависимости относительной объемной деформации от относительных вертикальных деформаций (начальный коэффициент пористости 0.55; 0.75), которые получены при девиаторной траектории нагружения. Анализ графиков показывает, что для всех опытов зависимости между вертикальными и объемными деформациями имеют нелинейный характер. При девиаторном нагружении для всех значений гидростатического давления объемные деформации нелинейно снижаются с выпуклостью к оси вертикальной деформации.

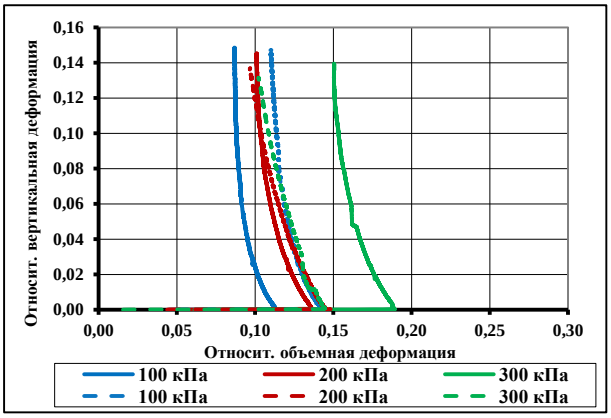


Рис. 5 Зависимости относительных вертикальных деформаций от относительной объемной деформации: ——— при влажности 20%; - - - - - водонасыщенное состояние (начальный коэффициент пористости суглинка 0.75).

На рис. 6-8 представлены графики, которые описывают зависимости модуля деформации от начального значения коэффициента пористости для различных значений гидостатического давления, анализ которых показывает, что с уменьшением коэффициента пористости происходит увеличение модуля деформации как в воздушно-сухом, так и в водонасыщенном состоянии суглинка.

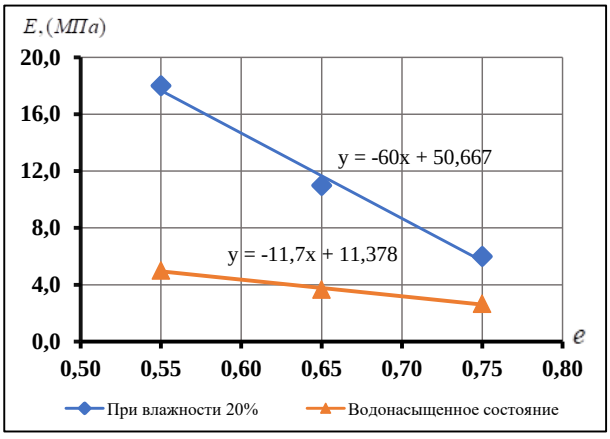


Рис. 6 Зависимости модуля деформации от начального коэффициента пористости суглинка (гидростатическое давление 100 кПа).

При этом зависимости модуля деформации от коэффициента пористости для водонасыщенного суглинка во всех значениях гидростатического давления имеют линейный характер. Для суглинка влажностью 20% эти зависимости для значений гид-

ростатического давления 100 и 200; 300 МПа также имеют линейный характер. При этом для всех значений гидростатического давления и плотности образцов водонасыщение приводит к снижению модуля деформации.

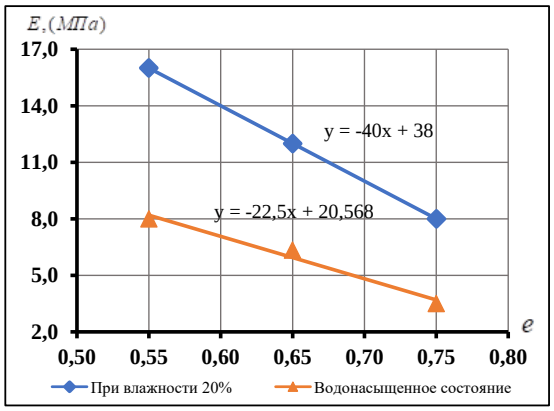


Рис. 7 Зависимости модуля деформации от начального коэффициента пористости суглинка (гидростатическое давление 200 кПа).

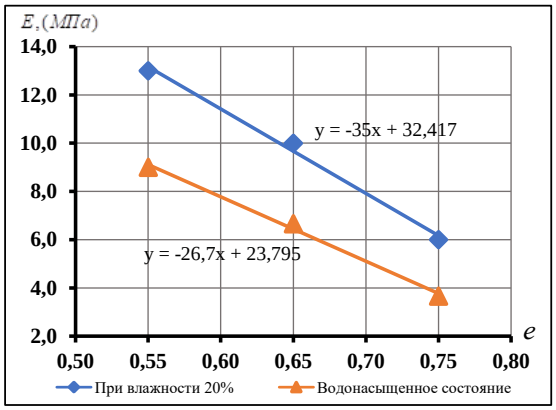


Рис. 8 Зависимости модуля деформации от начального коэффициента пористости суглинка (гидростатическое давление 300 кПа).

На рис. 9 представлены зависимости объемных деформаций от гидростатического давления, анализ которых показывает, что эти зависимости имеют линейный характер для суглинка при влажности 20% и водонасыщенном состоянии.

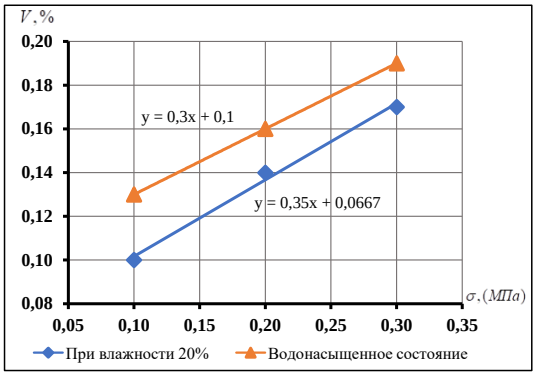


Рис. 9 Зависимости объемных деформаций $V, \%$ от гидростатического давления σ, Мпа.

Обсуждение: Анализ результатов обследований тела северной дамбы Междуреченского водохранилища показал, что она состоит из твердых плотных суглинков. При проектировании плотины были использованы механические показатели грунтов, определенные методом компрессии и сдвига. Известно, что наиболее точно механические показатели грунтов определяются методом трехосного сжатия, поскольку этот метод позволяет создать в образце грунта напряженное состояние, близкое к естественному напряженному состоянию грунта и тем самым позволяет точно определить значения модуля деформации, удельного сцепления и угла внутреннего трения. Использование этих показателей механических свойств грунтов позволит оптимально проектировать и надежно эксплуатировать плотину. Результаты испытания на трехосное сжатие показали, что водонасыщение образцов приводит к снижению механических показателей суглинка, которое слагает тело плотины Междуреченского водохранилища. Это происходит при заполнении водохранилища. Учет влияния воды на механические свойства суглинка, слагающего тело дамбы, позволит надежно эксплуатировать водохранилище через регламентирование скорости заполнения и уровня воды в нём.

4 Заключение

1. Результаты испытаний суглинков на трехосное сжатие показали, что модуль деформации грунта зависит от начального значения коэффициента пористости. В целом наблюдается, что с ростом начальной плотности суглинка значение модуля деформации увеличивается. Зависимости модуля деформации от начальной плотности суглинка аппроксимируются линейной функцией и зависят от значения гидростатического давления.

2. Результаты экспериментальных исследований объемных деформаций на трехосное сжатие показали, что при девиаторном нагружении происходит снижение объемных деформаций. Зависимости вертикальных деформаций от объемных деформаций аппроксимируются нелинейной зависимостью.

3. При гидростатическом нагружении суглинка зависимость объемных деформаций от гидростатического давления аппроксимируется линейной зависимостью при влажности 20% и водонасыщенном состоянии грунта.

4. Анализ результатов испытаний на трехосное сжатие показал, что водонасыщение суглинка приводит к снижению значений механических показателей грунта, что необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации грунтовых плотин.

Литература

[1] *Аимбетов И.К.* Инженерно-геологические основы строительства зданий и сооружений на засоленных грунтах Каракалпакстана // Нукус: Илим. – 2020. – С. 287.

[2] *Аимбетов И.К., Аимбетов К.Ш., Сапарниязов Б.* Результаты обследований северной дамбы Междуреченского водохранилища. Вестник ККО АН РУз. Нукус: – 2025. – № 1– 23-28 с.

[3] *Ананьев В.П., Потапов А.Д.* Инженерная геология // Москва: «Высшая школа». – 2002. – С. 479.

[4] *Гольдин А.Л., Рассказов Л.Н.* Проектирование грунтовых плотин // Москва: «Энергоатом». – С. 304.

[5] *Духовный В.А., Ю. де Шуттер.* Южное Приаралье – новые перспективы. - Т.: Нори. – 2003. – С. 154.

[6] Справочник проектировщика. Основания, фундаменты и подземные сооружения. – Москва: Стройиздат. – 1985. – С. 480.

[7] *Цытович Н.А.* Механика грунтов. – М.: Стройиздат. – 1963. – С. 636.

[8] *Naeiny S.A., Jahanger M.A., Monshi A.* Mechanisms Controlling the Undrained Strength Behavior of Landfill Liner Clay /Proceeding of the fifth International Symposium on deformation characterictics of geomaterials, is Seoul, vol. 1 / Hyun-Ki Kim, Jong-Sub Lee, Young-Hoon Jung, Dong-Soo Kim. Seul,. – 2011. – pp. 500–505.

[9] ГОСТ. 12248.3-2020. Межгосударственный стандарт. Грунты. Определение характеристик прочности и деформируемости методом трехосного сжатия. - М.: Изд-во «Стандартинформ». – 2020. – С. 78.

[10] *Интернет ресурс.* https://aral.uz/doc/local-reservoirs.pdf?utm_source

UDC 624.131(175)

DEFORMABILITY OF LOAMS COMPOSING THE BODY OF THE NORTHERN DAM OF THE MEZHRECHENSKOYE RESERVOIR UNDER TRIAXIAL COMPRESSION

[1*] ***Aimbetov I.K.,*** [2] ***Aimbetov K.SH.***

[1]izzet_chf@mail.ru, [2]aimbetovkamalatdiyin@gmail.com

Karakalpak Research Institute of Natural Sciences, Karakalpak Branch of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Nukus

The results of triaxial compression tests of the loams composing the body of the North Dam of the Mezhrechenskoye Reservoir are presented. To assess the influence of the initial loam density, soil samples were tested at initial void ratio values of 0.55; 0.65; and 0.75. Samples were tested at 20% moisture content and in a water-saturated state using a kinematic loading scheme. Experimental dependencies of the deformation module value on the initial density were established at a moisture content of 20% and in the water-saturated state of the samples. Experimental patterns of volumetric deformations from hydrostatic pressure have been established. The research results can be utilized in the design and operation of earth dams in the Muynak district of Karakalpakstan.

Keywords: Loam, embankment dam, triaxial compression, Muynak district.

Citation: Aimbetov I.K., Aimbetov K.SH. 2026. Deformability of loams composing the body of the northern dam of the Mezhrechenskoye reservoir under triaxial compression. *Problems of mechanics.* 1(35): 142-149.

УДК 621.01

РАСЧЕТ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ИЗГИБА ПИЛЬНОГО ДИСКА ВОЛОКНООТДЕЛИТЕЛЯ В СИСТЕМЕ ПОЛЯРНОЙ КООРДИНАТЫ

[1*]***Мухаммадиев Д.М.***, [1]***Абзоиров О.Х.***, [1]***Жумаев Н.К.***,
[2]***Жамолова Л.Ю.***, [1]***Примов Б.Х.***

[*]davlat_mm@mail.ru

[1]Институт механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз, Ташкент, Узбекистан

[2]Ташкентский государственный аграрный университет, Ташкент, Узбекистан

В работе представлены результаты расчёта осесимметричного изгиба пильного диска волокноотделителя, выполненного в полярной системе координат с учётом геометрической и силовой симметрии конструкции. Пильный диск моделировался в виде тонкой круглой пластины, шарнирно опёртой по внешнему контуру и нагруженной по внутреннему, свободному от закреплений контуру равномерно распределённой краевой нагрузкой. Решение дифференциального уравнения изгиба для случая действия единичной силы было получено численным способом с использованием программной среды MS Excel, что обеспечило пошаговую реализацию расчётного алгоритма и возможность варьирования исходных параметров. На основе принципа суперпозиции определялось итоговое значение прогиба. В результате расчетов установлено, что разность между расчетным значением изгиба пильного диска волокноотделителя (2.64 мм) и экспериментальным значением (2.74 мм) составляет приблизительно 3.65%.

Ключевые слова: волокноотделительная машина, пильный цилиндр, пильный диск, сталь У8, изгиб, изгибающая сила, изгибающий момент.

Цитирование: *Мухаммадиев Д.М., Абзоиров О.Х., Жумаев Н.К., Жамолова Л.Ю., Примов Б.Х.* Расчет осесимметричного изгиба пильного диска волокноотделителя в системе полярной координаты // Проблемы механики. – 2026. – № 1(35). – С. 150-158.

1 Введение

Известно, что ресурс работы пильного диска и колосника зависит от контактного трения (рис.1). Процесс трения пильного диска вращающейся частотой 730 об/мин о колосник приводит к износу как зубьев пильных дисков, так и рабочих зон колосников (рис. 2). Соответственно изучение изгиба пильных дисков является актуальной задачей процесса джинирования [1–3].

Изгиб круглого пильного диска (в статике) удобно рассматривать в полярной системе координат, которую отнесем к срединной плоскости пильного диска [4]. Начало отсчета координат (полюс) примем в центре срединной плоскости (рис. 3). В общем случае изгиба круглого пильного диска поперечная нагрузка и все величины, характеризующие напряженное и деформированное состояние пильного диска, являются функциями двух переменных r и θ [5].

Оператор Лапласа в полярной системе координат имеет вид [6]

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \tag{1}$$

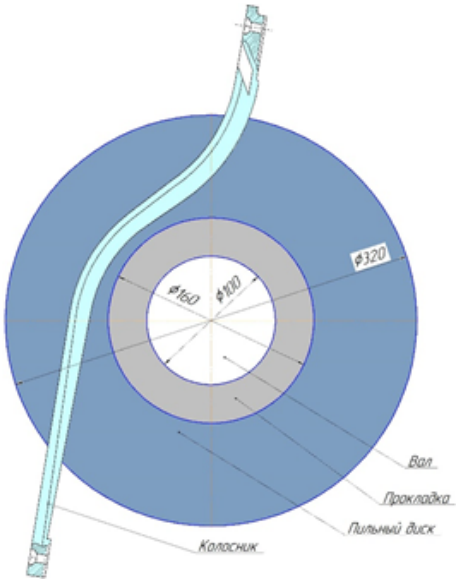


Рис. 1 Поперечный разрез вала, прокладки и пильного диска с колосником

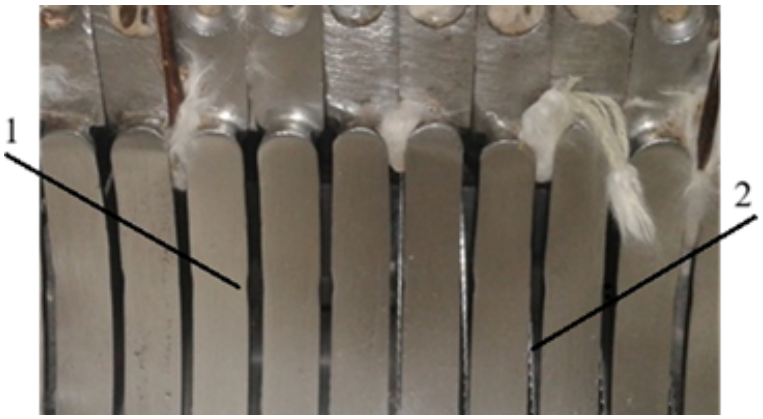


Рис. 2 Износ рабочих зон колосников (1) от касаний пильных дисков (2)

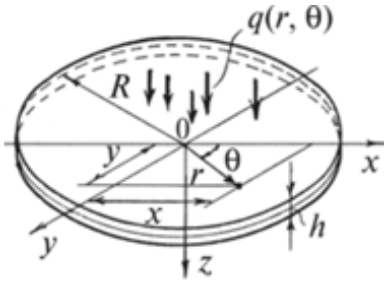


Рис. 3 Расчетная схема

В соответствии с этой формулой изгиб круглого пильного диска в полярной системе координат имеет следующий вид:

$$\nabla^2\nabla^2 w(r,\theta) = \frac{q(r,\theta)}{D}, \tag{2}$$

где $D = (E \cdot h^3)/(12 \cdot (1 - \nu^2))$ – изгибная жесткость пильного диска.

Изгиб круглого пильного диска можно рассматривать как осесимметричный, если нагрузка на пильный диск и условия закрепления ее краев не зависят от полярного угла θ. При этом изогнутая срединная поверхность пильного диска представляет собой поверхность вращения, осью которой является ось Oz. Следовательно, прогиб пильного диска также не зависит от полярного угла θ и является функцией только радиуса (переменной) r, то есть $w = w(r)$. Эти условия распространяются на все напряжения и внутренние усилия в пильном диске [7].

При рассмотрении осесимметричного изгиба пильного диска расчет существенно упрощается, поскольку во всех уравнениях и формулах, описывающих изгиб пильного диска, производные по угловой координате θ обращаются в нуль. Поэтому дифференциальное уравнение изгиба пильного диска (2) принимает следующий вид:

$$\frac{d^4w}{dr^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d^3w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{dw}{dr} = \frac{q(r)}{D}. \tag{3}$$

Уравнение (3) является дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами типа Эйлера [8]. Для случая, когда пильный диск находится под действием равномерно распределенной нагрузки $q = const$, после интегрирования получим

$$w(r) = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r + \frac{qr^4}{64D}, \tag{4}$$

Входящие в (4) постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3 и C_4 подлежат определению из соответствующих граничных условий.

При осесимметричном изгибе в пильном диске могут действовать только три напряжения σ_r, σ_θ и τ и три внутренних усилия M_r, M_θ и Q_r выражения для которых упрощаются и принимают следующий вид (рис. 4):

$$\left.\begin{aligned}
M_r &= -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right]; \\
M_\theta &= -D\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right); \\
H &= -D(1-\nu)\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta}\right); \\
Q_r &= -D\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right); \\
Q_\theta &= -D\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right).
\end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

где υ – коэффициент (поперечной деформации) Пуассона.

Как видно (рис. 4) из соотношений (5), крутящий момент и окружная поперечная сила при осесимметричном изгибе равны нулю: $H = 0; Q_\theta = 0$. Тогда (5) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
M_r &= -D\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right), \\
M_\theta &= -D\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu\frac{d^2 w}{dr^2}\right), \\
Q_r &= -D\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

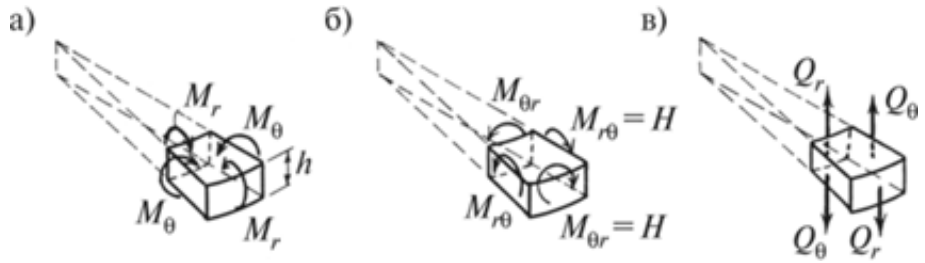


Рис. 4 Расчетная схема крутящих моментов и окружная поперечная сила

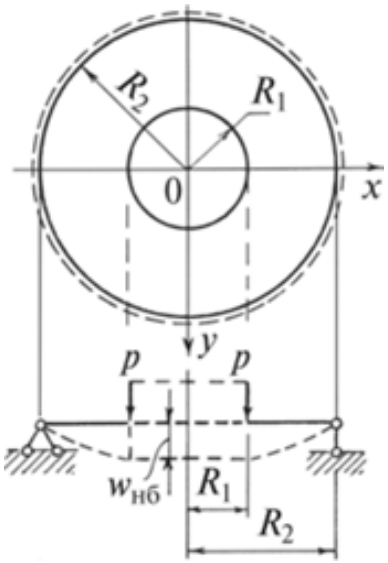


Рис. 5 Расчетная схема изгиба пильного диска

В этом случае пильный диск рассмотрим, как шарнирно опертую по внешнему контуру и находящуюся под действием краевой нагрузки , равномерно распределенной по внутреннему свободному от закреплений контуру (рис. 5). Поскольку в данном случае распределенная по поверхности пильного диска нагрузка отсутствует, частное решение в выражении (4) нужно положить равным нулю. Таким образом, прогиб пильного диска в этом случае определяется выражением

$$\begin{aligned} w(r) &= C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r, \\ \frac{dw}{dr} &= 2C_2 r + \frac{C_3}{r} + C_4(2r \ln r + r), \\ \frac{d^2w}{dr^2} &= 2C_2 - \frac{C_3}{r^2} + C_4(2 \ln r + 3). \end{aligned} \tag{7}$$

Для определения постоянных интегрирования необходимо использовать следующие граничные условия на внутреннем и внешнем контурах пильного диска:

$$r = R_1, \quad M_r = -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{dw}{dr}\right) = 0;$$

$$Q_r = -D\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr}\right) = -p;$$

$$r = R_2, \quad w = 0; \quad M_r = -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{dw}{dr}\right) = 0.$$

Используя граничные условия с помощью выражения для прогиба, получим систему четырех алгебраических уравнений относительно постоянных C_1, C_2, C_3 и C_4. После их определения задача расчета пильного диска по существу может считаться решенной. Подставив эти постоянные в выражения для прогиба и внутренних усилий в пильном диске, можно записать окончательные решения в виде замкнутых формул.

Стальной пильный диск толщиной $h = 0.00095$ м, с внутренним и внешним радиусами $r_1 = 0.05$ м, $r_2 = 0.16$ м нагружен силой P, которая передается на пильный диск через абсолютно твердое тело, жестко прикрепленное к внутреннему торцу пильного диска. Принимая для стали У8 $[\sigma] = 400$ МПа, модуль упругости $E = 2.07 \cdot 10^5$ МПа [9], $\nu = 0.286 - 0.294 \approx 0.29$ — коэффициент Пуассона [10], определим изгиб, поперечные силы и изгибающие моменты. Постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4 определим из граничных условий на внутреннем и внешнем торцах пильного диска:

при $r = r_1$: $\varphi(r_1) = 0$, $M(r_1) = 0$ и $Q(r_1) = -P$,

при $r = r_2$: $\varphi(r_2) = 0$, $M(r_2) = 0$ и $Q(r_2) = 0$.

Граничные условия приводят к системе линейных алгебраических уравнений (6) и (7) относительно C_1, C_2, C_3 и C_4:

$$\begin{gathered}
\varphi(r_1) = 0 \Rightarrow \frac{dw}{dr} = 0 \Rightarrow \quad 2C_2 r_1 + \frac{C_3}{r_1} + C_4 r_1 (1 + 2\ln r_1) = 0, \\
Q(r_1) = -P \Rightarrow \quad 4C_4 \frac{D}{r_1} = -P \Rightarrow C_4 = -\frac{P \cdot r_1}{4D}, \\
w(r_2) = 0 \qquad C_1 + C_2 r_2^2 + C_3 \ln r_2 + C_4 r_2^2 \ln r_2 = 0, \\
\varphi(r_2) = 0 \Rightarrow \frac{dw}{dr} = 0 \Rightarrow \quad 2C_2 r_2 + \frac{C_3}{r_2} + C_4 r_2 (1 + 2\ln r_2) = 0,
\end{gathered} \tag{8}$$

где:

$$\begin{gathered}
\frac{dw}{dr} = -\frac{C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(2\ln r + 3) + \frac{C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(2\ln r + 1) = \\
= 4C_3 + 3C_4 + C_4 2r \ln r + C_4 2\ln r = 4C_3 + 4C_4 + 4C_4 \ln r, \\
Q_r = -D\frac{d}{dr}\left(2C_2 - \frac{C_3}{r^2} + C_4(2\ln r + 3) + 2C_2 + \frac{C_3}{r^2} + C_4(2\ln r + 1)\right) = \\
= -D\frac{d}{dr}(4C_4 \ln r + 4C_2 + 4C_4) = -\frac{4D}{r} \cdot C_4.
\end{gathered}$$

В матричном виде: $Ac = b$,

$$c = \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{vmatrix} \quad A = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{r_1} & 2r_1 & r_1(1 + 2\ln r_1) \\ 0 & 0 & 0 & 4\frac{D}{r_1} \\ 1 & \ln r_2 & r_2^2 & r_2^2 \ln r_2 \\ 0 & \frac{1}{r_2} & 2r_2 & r_2(1 + 2\ln r_2) \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

В силу линейности системы постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4 (а значит, и решение задачи) будут линейно зависеть от параметра силы P. Положим $P = 1$ и решим задачу, то есть определим функции единичных перемещений $\bar{w}(r)$, углов поворота $\bar{\varphi}(r)$, радиального и окружного изгибающих моментов $\bar{M}_r(r)$ и $\bar{M}_\theta(r)$, а также поперечной силы $\bar{Q}$. Для линейной задачи для произвольного значения силы P будут выполняться соотношения:

$$w(r) = P \cdot \bar{w}(r), \quad M_r(r) = P \cdot \bar{M}_r(r), \quad M_\theta(r) = P \cdot \bar{M}_\theta(r), \quad Q(r) = P \cdot \bar{Q}(r).$$

Решение для единичной силы получено с помощью MS Excel [11]:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0,1 & 20 & -0,250 \\ 0 & 0 & 0 & 1248,135 \\ 1 & 0,026 & -1,833 & -0,047 \\ 0 & 0,32 & 6,25 & -0,426 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Обратная матрица A

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 0,129 & 2,230 \cdot 10^{-5} & 1 & -0,120 \\ -1,082 & 9,668 \cdot 10^{-4} & 0 & 3,463 \\ 0,055 & 5,164 \cdot 10^{-6} & 0 & -0,017 \\ 0 & 8,012 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Умножив матрицу A^{-1} на b получим постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4:

$C_1 = -2,23 \cdot 10^{-5};\ C_2 = -9,668 \cdot 10^{-4};\ C_3 = -5,164 \cdot 10^{-6};\ C_4 = -8,012 \cdot 10^{-4}.$

Тогда уравнение (7) имеет вид:

$$w(r) = -2,23 \cdot 10^{-5} - 9,668 \cdot 10^{-4} \cdot r^2 - 5,164 \cdot 10^{-6} \cdot \ln r - 8,012 \cdot 10^{-4} \cdot r^2 \cdot \ln r. \quad (9)$$

Используя уравнение (9) построим график (рис. 6) изменения изгиба пильного диска в зависимости от его радиуса r.

Зная соотношения (7) и поставив на уравнение (6) определяем внутренние усилия M_r и M_θ:

$$\begin{aligned} M_r &= -D\left(2C_2 - \frac{C_3}{r^2} + C_4(2\ln r + 3) + \frac{\nu}{r}\left(2C_2 r + \frac{C_3}{r} + C_4(2r\ln r + r)\right)\right) = \\ &= -D\left[2C_2(1+\nu) - \frac{C_3}{r^2}(1-\nu) + 2C_4 \cdot \ln r(1+\nu) + C_4(3+\nu)\right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} M_\theta &= -D\left[2C_2 + \frac{C_3}{r^2} + C_4(2\ln r + 1) + \nu\left(2C_2 - \frac{C_3}{r^2} + C_4(2\ln r + 3)\right)\right] = \\ &= -D\left[2C_2(1+\nu) + \frac{C_3}{r^2}(1-\nu) + 2C_4 \ln r(1+\nu) + C_4(1+3\nu)\right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя (10) и (11) построим графики изменения поперечных сил Q_r (рис. 7) и изгибающих моментов M_r и M_θ (рис. 8) в зависимости от радиуса r пильного диска.

В статье [12] представлены результаты эксперимента по изучению изгиба пильных дисков волокноотделительной машины при контакте с колосником с учётом силы затяжки. Испытания проводились на стенде с использованием прокладок из алюминиевого сплава и стали. Установлено, что при росте изгибающей силы с 6.9 до 43.1 Н изгиб увеличивается до 4.65 мм (алюминий) и 3.15 мм (сталь) при минимальной затяжке, и снижается до 3.06 мм и 2.74 мм соответственно — при максимальной. Полученные данные подтверждают повышение устойчивости дисков к изгибу, особенно при использовании стальной прокладки.

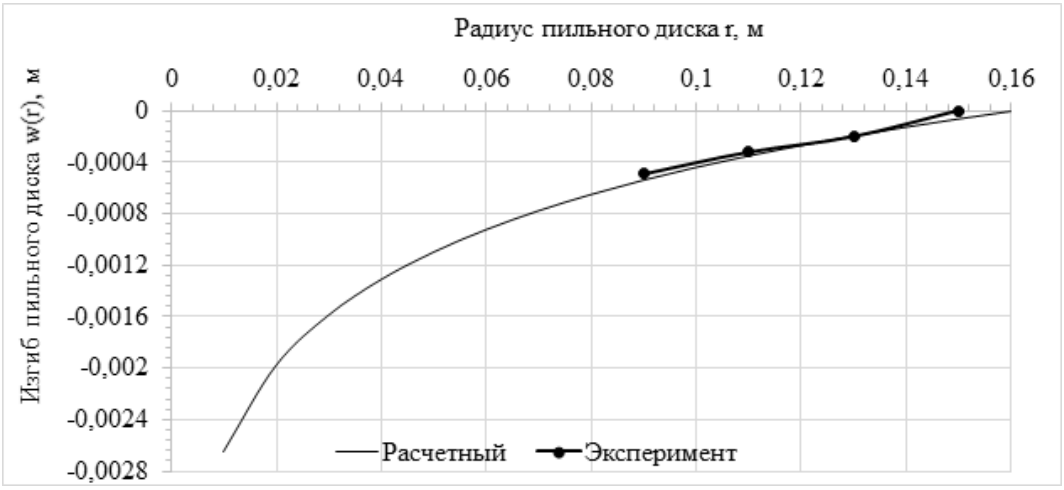


Рис. 6 Изменения изгиба пильного диска в зависимости от его радиуса r

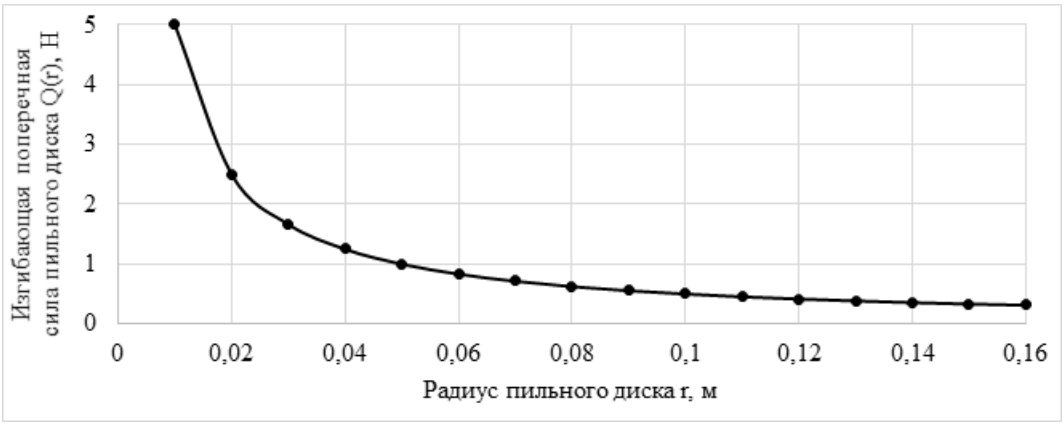


Рис. 7 Изменения изгибающей поперечной силы пильного диска в зависимости от его радиуса r

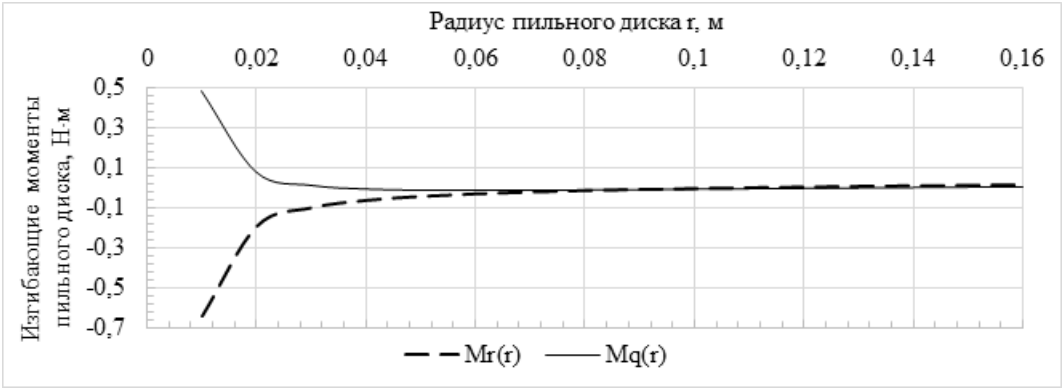


Рис. 8 Изменения радиального $M_r(r)$ и окружного $M_\theta(r)$ изгибающих моментов пильного диска в зависимости от его радиуса r

Расчетное значение изгиба пильного диска волокноотделителя, составляющее 2.64 мм, сопоставляется с экспериментальным значением, равным 2.74 мм [12] (рис. 6).

2 Заключение

Пильный диск моделировался в виде тонкой круглой пластины, шарнирно опёртой по внешнему контуру и нагруженной по внутреннему, свободному от закреплений контуру равномерно распределённой краевой нагрузкой. Решение дифференциального уравнения изгиба для случая действия единичной силы было получено численным способом с использованием программной среды MS Excel, что обеспечило пошаговую реализацию расчётного алгоритма и возможность варьирования исходных параметров. В результате проведённых расчётов установлено, что максимальный прогиб пильного диска составил 2,64 мм. Экспериментально измеренное значение равно 2,74 мм. Относительное расхождение между расчётным и экспериментальным результатами составило приблизительно 3,65 %, что свидетельствует о высокой степени адекватности принятой расчётной модели и корректности выбранных граничных условий. Полученное совпадение подтверждает применимость разработанной методики для инженерной оценки напряжённо-деформированного состояния пильных дисков волокноотделителей.

3 Благодарность

Работа выполнена в рамках бюджетного финансирования института Механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т. Уразбаева Академии наук Республики Узбекистан.

Литература

[1] *Шин И.Г., Муминов М.Р., Кулиев Т.М.* Динамическое упрочнение микрошариками пильных дисков хлопковых машин. – LAP LAMBERT Academic Publishing. – 2019. – 172 с.

[2] *Мадрахимов Д.У.* Технологические основы реновации и совершенствования технических средств для изготовления пильных дисков хлопкоперерабатывающих машин: Дисс. На соискание уч. степ. доктора философии (PhD) по техн. Наукам. Ташкент. – 2019. – 146 с.

[3] *Исмаилов А.А., Нарматов Э.А., Бутовский П.М.* Модернизация колосниковой решетки пильного джина // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. – 2021. – № 5 (395). – С. 180-185. – DOI 10.47367/0021-3497_2021_-5_180.

[4] *Атаров Н.М.* Сопротивление материалов в примерах и задачах. – М.: ИНФРА-М. – 2020. – 397 с.

[5] *Липовцев Ю.В., Русин М.Ю.* Прикладная теория упругости: учебное пособие. – М.: Дрофа. – 2008. – 319 с.

[6] *Араманович И.Г., Левин В.И.* Уравнения математической физики. – М.: Наука. – 1969. – 297 с.

[7] *Ильин А.М.* Уравнения математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2009. – 192 с.

[8] *Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.И.* Курс классической математики в примерах и задачах. Том 2. – М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2007. – 504 с.

[9] *Характеристики стали У8*. – Марочник сталей и сплавов онлайн. – URL: https://metal.place/ru/wiki/u8/334386/.

[10] *Коэффициент Пуассона стали У8*. – E-metall blog. – URL: https://e-metall.ru/blog/uprugost-stali/.

[11] *Атаров Н.М., Богопольский В.Г.* Расчет кольцевых пластин с помощью электронных таблиц Microsoft Excel. – М.: МИСИ. – 2017. – 74 с.

[12] *Мухаммадиев Д.М., Абзоиров О.Х., Жумаев Н.К., Жамолова Л.Ю.* Изгиб пильных дисков волокноотделителя с учетом их затяжки // Проблемы механики. – 2025. – №2. – С. 106-111.

UDC 621.01

CALCULATION OF AXISYMMETRIC BENDING OF A SAW BLADE OF THE SAW GIN IN POLAR COORDINATE

[1*]***Mukhammadiev D.M.,*** [1]***Abzoirov O.Kh.,*** [1]***Jumaev N.K.,*** [2]***Zhamolova L.Yu.,*** [1]***Primov B.Kh.***

[*]davlat_mm@mail.ru

[1]Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T. Urazbaev, Tashkent, Uzbekistan

[2]Tashkent State Agrarian University Tashkent, Uzbekistan.

This paper presents the results of a calculation of the axisymmetric bending of a fiber gin saw blade. The calculation was performed in a polar coordinate system, taking into account the geometric and force symmetry of the structure. The saw blade was modeled as a thin circular plate, hinged along its outer contour and loaded along its inner, unsupported contour with a uniformly distributed edge load. The solution to the differential bending equation for the case of a single force was obtained numerically using the MS Excel software environment, which ensured a step-by-step implementation of the calculation algorithm and the ability to vary the initial parameters. The final deflection value was determined using the superposition principle. The calculations revealed that the difference between the calculated value of the fiber gin saw blade deflection (2.64 mm) and the experimental value (2.74 mm) is approximately 3.65%.

Keywords: Fsaw gin machine, saw cylinder, saw blade, U8 steel, bending, bending force, bending moment.

Citation: Mukhammadiev D.M., Abzoirov O.Kh., Jumaev N.K., Zhamolova L.Yu., Primov B.Kh. 2026. Calculation of axisymmetric bending of a saw blade of the saw gin in polar coordinate. *Problems of mechanics.* 1(35): 150-158.

“СВЕТЛОЙ ПАМЯТИ ВЫДАЮЩИХСЯ УЧЁНЫХ И НАСТАВНИКОВ”

Цитирование: “Светлой памяти выдающихся учёных и наставников” // Проблемы механики. – 2026. – №1(35). – С. 159-161.

ПАМЯТИ НАТАЛЬИ АЛЕКСАНДРОВНЫ КОРШУНОВОЙ



Коршунова Наталья Александровна (1947-2026)

Наталья Александровна родилась 13 ноября 1947 года в городе Кыштым Челябинской области. В 1970 году окончила механико-математический факультет Ташкентского государственного университета по специальности «Механика» и с этого же года связала свою профессиональную деятельность с университетом. Она прошла путь от ассистента до профессора, более полувека работая на кафедре общей, а затем теоретической и прикладной механики Национального университета Узбекистана.

В 1977 году Наталья Александровна защитила кандидатскую диссертацию в Университете дружбы народов (Москва), а в 1993 году — докторскую диссертацию в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Её научная деятельность была связана с развитием аналитической механики, теорией управления движением механических систем, оптимизацией траекторий в гравитационных полях и задачами механики космического полета.

Ею была разработана оригинальная теория оптимизации траекторий центра масс космического аппарата в различных гравитационных полях, основанная на классических методах аналитической механики. Полученные результаты имеют фундаментальное значение и нашли применение в небесной баллистике при построении межпланетных траекторий.

Наталья Александровна являлась представителем научной школы аналитической механики профессора Ахмеда Ганиевича Азизова, достойно продолжая её традиции. Ею опубликовано около 130 научных работ, под её руководством защищены кандидатские и докторские диссертации. Она руководила фундаментальными научными проектами, входила в состав экспертных советов, была членом редколлегии журнала «Проблемы механики».

Профессор Коршунова была единственной женщиной — доктором наук по теоретической механике в Республике Узбекистан. Её отличали высокий профессионализм, принципиальность, интеллигентность, доброжелательность и искренняя преданность университету. В 2021 году она была награждена Почётной грамотой Министерства высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан.

Светлая память о Наталье Александровне Коршуновой — ученом, Учителе и Человеке — навсегда сохранится в сердцах её коллег, учеников и друзей.

Коллектив кафедры «Механика и математическое моделирование» Национального университета Узбекистана, Общество механиков Узбекистана и редакционная коллегия журнала.

ИЛМ-ФАН РАВНАҚИГА БАХШИДА ЭТИЛГАН ҲАЁТ



Қодиров Сарвар Муқодирович (1940-2026)

Ўзбекистонда хизмат кўрсатган фан арбоби, ЎзҚХФА мухбир аъзоси, техника фанлари доктори, профессор Сарвар Муқодирович Қодиров ўз умрини ўзининг фидокорона меҳнати билан жамиятимизнинг илмий-техникавий ва маънавий-маърифий ривожланишига катта ҳисса қўшиб келган жонкуяр олим ва жамоат арбоби.

Устоз Сарвар Қодиров 60 йилдан зиёд олий таълим тизимида самарали меҳнат қилиб, ўзининг юксак касбий маҳорати, илмий салоҳияти ва педагогик фаолияти билан нафақат талабалар, балки кенг жамоатчилик орасида ҳам юксак ҳурмат қозонган. У автотранспорт, автомобилсозлик ва йўл коммуникациялари соҳаларида юксак натижаларга эришиб, соҳанинг ривожига улкан ҳисса қўшган етук олим сифатида тан олинган.

Профессор С. Қодиров 1995–2005 йилларда Тошкент автомобил-йўллар институти ректори сифатида фаолият юритиб, таълим муассасасини нафақат республика, балки халқаро миқёсда тан олинган нуфузли марказлардан бирига айлантирди.

Сарвар Қодиров нафақат раҳбар, балки буюк ихтирочи олим сифатида ҳам эътироф этилган. Унинг иштирокида яратилган "САНО" енгил автомобили ҳамда фермерлар учун мўлжалланган "Уз-Фермер" транспорт воситалари миллий автомобилсозлик соҳасида муҳим ютуқлардан бири бўлди.

Илмий-педагогик фаолияти давомида устоз 25 та дарсликлар, 20 дан ортиқ ўқув қўлланмалар ва 30 дан ортиқ илмий асарлар муаллифи сифатида танилди. Айниқса, "Автомобильные и тракторные двигатели" дарслиги халқаро миқёсда эътироф этилиб, хорижий давлатларда ҳам нашр этилди ва амалиётга жорий қилинди.

С.Кадиров ўзининг илмий мактабини яратган устоз сифатида ҳам алоҳида эътиборга сазовор. Унинг раҳбарлигида 4 нафар фан докторлари, 14 нафар фан номзодлари ва кўплаб магистрлар тайёрланиб, бугунги кунда улар турли соҳаларда самарали фаолият олиб бормоқда. Устознинг шогирдлари нафақат илмий, балки амалий соҳада ҳам юксак натижаларга эришиб келмоқдалар.

Унинг хизматлари давлат томонидан муносиб баҳоланиб, "Ўзбекистонда хизмат кўрсатган фан арбоби" унвони, халқаро "Ал-Хоразмий" мукофоти ва қатор фахрий унвонлар "Олий таълим фидойиси", "Фахрий автотранспортчи", "Тошшаҳарйўловчитранс" фахрий ходими унвонлари билан тақдирланган.

Профессор Сарвар Қодиров ижодкор инсон сифатида ҳам кенг танилган. У томонидан яратилган 80 дан ортиқ рисола, очерк ва бадиий асарлар ёшларни ватанпарварлик, маънавий баркамоллик ва илмга садоқат руҳида тарбиялашга хизмат қилмоқда. Унинг "Тақдир" автобиографик романи ҳам ўқувчилар томонидан илиқ қарши олинган. 2024 йилда Россия адабиёти мукофотининг "Йил ёзувчиси" номинациясида ғолиб деб топилиб, 585 каратли олтиндан ясалган "РАТ" кўкрак нишони билан тақдирланиши унинг ижодий фаолиятига берилган муносиб эътирофдир.

Устоз нафақат олим ва раҳбар, балки юксак инсоний фазилатларга эга, ёшларга меҳр-оқибатли, талабчан ва адолатли инсон сифатида ҳам қадрланади. Унинг ҳаёти ва фаолияти келажак авлод учун ибрат мактабидир.

Академик Қодиров Сарвар Муқодировични хотиралаб, оила аъзолари, яқинларига чуқур таъзия изҳор этамиз.

Ўзбекистон механиклар жамияти ва журнал таҳрир ҳайъати

ИНСТИТУТ ТАРИХИДА ИЗИ ҚОЛГАН УСТОЗ!



Муҳаммадрасул Эргашов

Тошкент тўқимачилик ва енгил саноат институти пайдо бўлибдики, ўз бағридан ҳаётини илм ва маърифатга бағишлаган қанчадан-қанча олимлар, илм эгалари, устоз ва мураббийларга жой берди ва тарих китобига улардан қолган азиз хотираларни сақлаб қолди. Бугун Институтнинг ҳар бурчагида нафаси мавжуд, остонасида изи қолган шундай табаррук инсонлардан бири устоз Муҳаммадрасул Эргашов ҳақида хотирлашамиз.

Табиатан илмга меҳри бўлак бўлган бу мураббий Қирғизистон Республикасининг Аравон туманида таваллуд топган. Болалигидан илм ва билимга бефарқ бўлмаган устоз Мухаммадрасул Эргашовни тақдир институт томон бошлаб келди ва унинг нурли тафаккурга бой фаолияти шу жойда муваффақиятли давом этди. Устознинг илм ва фанга эътибори жуда юқори эди. 1982-1984 йиллар Москва давлат университети “Газлар ва тўлқинлар динамикаси” кафедраси мудири академик Халил Ахмедович Рахматулин раҳбарилигида илмий тадқиқот ишларини бажарди. Устоз Халил Ахмедович унинг қобилятига юқори баҳо бериб, тўқимачилик фанининг асоси иплар динамикаси йўналишига таалуқли бўлган ипларга қўндаланг зарба таъсирида рўй берадиган жараёнлар мавзуси устида илмий ишлар олиб боришиги раҳбарлик қилди. Тез орада Мухаммадрасул Эргашов номзодлик диссертациясини ёқлади. Тошкентда бу мавзу бўйича илмий ва амалий муаммоларини ечишга бағишланган илмий тақдиқот ишларни давом эттириб, 1993 йилда шу йўналиш бўйича докторлик диссертациясини ҳимоя қилди. Институтнинг қатор кафедраларида ўтказиладиган семинарларда фаол қатнашиб, иплар назариясининг ривожига салмоқли ҳисса қўшди.

Устоз ТТЕСИда кафедра профессори, кафедра мудири, илмий ишлар бўйича проректор лавозимларида ишлади. У шунчаки ишламади, бу йўлда фойдали фикрлари, ўсишга қаратилган ўй-хаёллари, унумли ҳаракатлари ва азиз неъмат бўлмиш тақдирини муҳрлади, ўзидан яхши ном қолдирди.

Изланишлари давомида кўплаб илмий мақолалар, дарсликлар яратди, этагидан тутган шогирдлари бошини силаб, уларга тажрибаларини улашди. Ҳаммага дўст бўлди. Ҳаммага яхшиликни раво кўрди. Маслаҳатини берди. Гапирса мардларча олдида сўзлади, яхшиликка ундади. Очиққўнгил, тўғрисўз инсон сифатида ёдимизда қолган устоз Мухаммадрасул Эргашовнинг умр чироғи институтда мангу ёниқ қолди. У бизга нафақат маърифат борасида балки инсонийлик йўлида ҳам улкан дарс қолдирди. Ўйлаймизки, унинг изини давом эттиргувчи фарзандлари, шогирдлари, дўст ёрлари устоз қолдирган маънавий хазинадан унумли фойдаланишади ва бардавом бўлишига кўмаклашишади.

Институтда шундай инсон билан ҳамнафас яшаганимиз учун тақдирдан доим миннатдормиз.

Ўзбекистон механиклар жамияти, журнал таҳрир ҳайъати ва ТТЕСИ

Руководство для авторов

К публикации в журнале «Проблемы механики» принимаются рукописи на английском, русском языках, содержащие оригинальные результаты, относящиеся к широкому спектру задач механики. К публикации принимаются научные статьи, соответствующие профилю журнала и отражающие результаты теоретических и экспериментальных исследований автора(ов). Все представленные в редакцию статьи проходят следующие процедуры:

проверку на техническое соответствие настоящим требованиям;

рецензирование;

утверждение или отклонение на очередном заседании редколлегии журнала.

Представленные статьи в обязательном порядке должны быть сопровождены экспертным заключением. Статьи без экспертного заключения не принимаются к рассмотрению. Не допускается направление в редакцию ранее опубликованных статей или статей, отправленных для публикации в другие издания. Представленные в редакцию материалы авторам не возвращаются. Количество авторов для одной публикации не более четырех. Соавторство допускается не более чем для двух статей в одном номере журнала. Статья должна быть посвящена решению некоторой задачи/проблемы, раскрывать ее существо, давать направления и способы решения. Статьи, излагающие существующее положение дел, к публикации не принимаются.

Название статьи должно чётко отражать тему, позицию автора и не должно вызывать у читателя ложных допущений о содержании статьи. Название статьи должно содержать не более 10 слов и состоять не более чем из 2 предложений (обоснованные исключения допускаются). Следует избегать в названии статьи слов «исследования», «анализ» и строго придерживаться научного стиля изложения. Сокращения в названии статьи можно использовать только для общепринятых в данной области исследований названий (например, НДС – напряженно деформированное состояние, МКЭ - метод конечных элементов и т.д.).

Редакция принимает от авторов статьи в электронном виде через электронную систему подачи статей при условии, что они оформлены по правилам. Авторы могут прислать статью и документы к ней на электронную почту: instmechofficial@gmail.com

Статья должна обладать:

- актуальностью (проблематика статьи должна представлять интерес для научного сообщества в плане текущего развития науки и техники);
- научной проработкой (в статье должны рассматриваться научные аспекты реша-емой задачи, даже если сама по себе задача имеет прикладное значение);
- новизной (представленные в статье результаты должны обладать научной новиз-ной).

Статьи обзорного или обобщающего характера допускаются только по специальному решению редакционной коллегии.

- введение (включая актуальность, научную значимость вопроса с кратким обзором литературы);
- постановку задачи;
- методы решения или теоретическую часть;

– обсуждение результатов экспериментальных исследований (включая их практическую значимость, предложения и рекомендации по внедрению);

– заключение или выводы в целом по изложенной работе и приведенным результатам.

Статья должна быть четко структурирована, т.е. должна содержать общепринятые в научных публикациях разделы, а именно: введение, метод решения/исследования, результаты, обсуждения. Представленные в статье результаты должны быть обоснованы с помощью введенного в статье научного инструментария: математическим выводом, законом сохранения, вычислительным экспериментом и т.п., с тем, чтобы можно было считать их достаточно достоверными.

Статья должна представлять законченный цикл целостного исследования, т.е. она должна начинаться постановкой задачи, а завершаться достоверным решением этой задачи.

Не допускаются к публикации статьи, содержащие только замыслы, идеи решения задач. Идеи должны быть доведены до уровня закона, закономерности, зависимости, модели, метода, алгоритма и т.п. Необходимо обосновать истинность идеи, ее адекватность, полезность.

Результаты, представленные в статье, должны быть сформулированы в виде положений, четко определяющих существо их вклада в науку, в решение научной или конкретной прикладной задачи. Статья должна быть написана языком, понятным специалисту в соответствующей области. Должны использоваться общепринятые технические термины.

Представляемые статьи должны содержать:

– индекс УДК;

– название;

– сведения об авторах (Фамилия, Инициалы, место работы, электронный адрес);

– аннотацию в объёме от 100 до 200 слов (на русском, английском);

– ключевые слова или фразы в объёме не более 10;

– список литературы с рекомендуемым объёмом от 10 до 20 ссылок.

Ниже приведены требования к оформлению статей.

Данный документ сам по себе является примером статьи, изготовленной согласно изложенным требованиям. Работу над русскоязычной статьёй удобно начинать с редактирования файла-образца template-rus.tex, англоязычной–template-eng.tex. Обращаем внимание, что документ должен быть сохранен в кодировке UTF-8 without BOM. Для смены кодировки рекомендуется пользоваться текстовым редактором Notepad++. Инструкции по оформлению далее изложены для первого варианта шаблона, где основным языком текста является русский.

Контрольный список подготовки материала к отправке

Все представленные материалы должны соответствовать следующим требованиям.

К публикации принимаются научные статьи, соответствующие профилю журнала и отражающие результаты теоретических и экспериментальных исследований авторов.

Файл с материалом представлен в формате документа LATEX.

Представленные статьи в обязательном порядке сопровождаются экспертным заключением. Статьи без экспертного заключения не принимаются к рассмотрению.

Текст соответствует стилистическим и библиографическим требованиям, описанным в Руководстве для авторов, которое можно **скачать** в формате LATEX.

Заявление о конфиденциальности

Имена и адреса электронной почты, введенные на сайте этого журнала, будут использованы исключительно для целей, обозначенных этим журналом, и не будут использованы для каких-либо других целей или предоставлены другим лицам и организациям.

Статьи принимаются по следующим и смежным к ним тематикам:

- Механика деформируемого твёрдого тела.
- Механика жидкости и газа.
- Общая механика.
- Основания, фундаменты и механика грунтов.
- Строительная механика.
- Экспериментальная механика.
- Теория механизмов и машин.
- Сейсмостойкость зданий и гидротехнических сооружений.
- Сейсмостойкость подземных и транспортных сооружений.
- Сельскохозяйственное машиностроение и оборудование.

Сроки рассмотрения материалов:

Техническая экспертиза представленных материалов занимает срок до 15 рабочих дней, после чего автор будет уведомлен (на сайте журнала) о прохождении или отклонении материалов.

После прохождения техническое соответствия материалов правилам журнала работа будет направлена 2 рецензентам. Срок рассмотрения работы занимает до 60 рабочих дней. Рецензенты могут отправить представленные материалы на доработку. В случае по-лучения положительного отзыва от обоих рецензентов работа будет представлена на утверждение на очередное заседание редакционной коллегии. В случае разделения мнений рецензентов, данная статья будет отправлена 3 рецензенту и по его решению статья будет отклонена, принята или отправлена на доработку.

После принятия статьи на заседании редакционной коллегии она будет направлена для публикации в журнал в порядке очередности.