

Решение гидродинамических задач с применением универсальной консервативной схемы переноса консервативных примесей совместно с алгоритмом решения системы уравнений Навье–Стокса

М.М. Мирсаидов^{1,2*} , А.Г. Савицкий¹ , А.Т. Салохиддинов¹ 

¹ Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства», ул. Кары-Ниязи, 39, Ташкент, 100000, Узбекистан

² Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т. Уразбаева Академии наук Республики Узбекистан, ул. Дурмон Юли, 33, Ташкент, 100125, Узбекистан

* Автор для корреспонденции: theormir@mail.ru

Поступила: 16 июля 2026 | Доработана: 15 августа 2026 | Принята: 5 сентября 2026 | Опубликовано: 30 сентября 2026

АННОТАЦИЯ

В работе представлен алгоритм решения вычислительных задач гидромеханики на основе абсолютно консервативной схемы переноса импульса и примесей и явных конечно-разностных аппроксимаций. Рассмотрены основные трудности решения полной системы уравнений Навье–Стокса: потеря консервативности некоторых схем, отсутствие отдельного эволюционного уравнения для гидродинамического давления и численная неустойчивость. Описана конечно-разностная реализация в цилиндрической системе координат с использованием консервативной схемы переноса ТИАМЕ и полученного эволюционного уравнения давления. Изучено взаимодействие компонентов газового потока с экзотермическим выделением тепла и его влияние на скорость, давление, температуру и перенос примесей. Модельный расчёт продемонстрировал устойчивые поля течения и соблюдение законов сохранения. Сопоставление рассчитанных распределений с экспериментальными данными не проводилось; вывод о работоспособности алгоритма основан на численной устойчивости и физически ожидаемом характере полей. Предлагаемый подход предназначен для решения широкого класса гидродинамических задач, в том числе с использованием доступных программных средств.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

уравнения Навье–Стокса, вычислительная гидродинамика, абсолютно консервативная схема, явные конечно-разностные аппроксимации, эволюционное уравнение давления, межкомпонентное взаимодействие, тепловыделение, схема ТИАМЕ, схемная вязкость.

Solution of Hydrodynamic Problems Using a Universal Conservative Scheme for Transport of Conservative Admixtures Coupled with an Algorithm for Solving the Navier–Stokes Equations

М.М. Mirsaidov^{1,2*} , А.Г. Savitsky¹ , А.Т. Salokhiddinov¹ 

¹ National Research University “Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers”, 39 Kary-Niyazi Street, Tashkent 100000, Uzbekistan

² Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M. T. Urazboev, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, 33 Durmon Yuli Street, Tashkent 100125, Uzbekistan

* Corresponding author: theormir@mail.ru

ABSTRACT

An algorithm for computational hydromechanics is presented that combines an absolutely conservative transport scheme for momentum and admixtures with explicit finite-difference approximations. The study addresses key difficulties encountered when solving the full Navier–Stokes equations, including loss of conservation in certain schemes, the lack of a separate evolution equation for hydrodynamic pressure, and numerical instability. A cylindrical-coordinate formulation is described using the TIAME conservative transport scheme together with a derived pressure evolution equation. Interactions between gas components accompanied by exothermic heat release are examined, including their effects on velocity, pressure, temperature and constituent transport. The test calculation produced stable flow fields consistent with conservation laws and physically expected distributions. No comparison with experimental measurements was performed; the assessment of the algorithm relies on numerical stability and the qualitative behaviour of computed fields. The proposed approach may be useful for a wide range of hydrodynamic problems and can be implemented using accessible computational tools.

KEYWORDS

Navier–Stokes equations, computational fluid dynamics, absolutely conservative scheme, explicit finite-difference approximation, pressure

УДК 627.8:624.9:534.1

1. Введение. Проблемы вычислительной гидромеханики и практика их решения

Задачи вычислительной гидродинамики решаются на основе уравнений Навье-Стокса. Главными проблемами при решении полной системы уравнений Навье-Стокса являются:

- Часто возникающая и часто также непредсказуемая потеря консервативности большинства принятых к использованию конечно-разностных схем при переносе консервативных характеристик в двумерных и трехмерных задачах. Сходящиеся и затем расходящиеся в пространстве поля скоростей при их описании конечно-разностными аппроксимациями порождают иногда и дополнительно необъяснимые вычислительные осцилляции.
- Организация устойчивости вычислительного процесса и борьба с появлением синусоидальных пульсаций с бесконечно возрастающей амплитудой или осцилляций типа “пила”[4],[5],[7].
- Отсутствие эволюционного уравнения для расчета гидродинамического давления.

Первая проблема устраняется уменьшением шагов по пространству в сетках с целью уменьшения ошибки потери консервативности до приемлемых значений [12]. В задачах, для которых требуется абсолютно точное соблюдение законов консервативности, применяют методы конечных элементов. Иногда проводится интегрирование по поверхности конечных элементов, считаются по сложным и весьма разнообразным формулам и затем взаимно увязываются потоки (флюксы) через границы конечных элементов[22]. Хотя метод конечных элементов и решает проблему консервативности, он порождает свои собственные и пока не решенные проблемы.

Вторая проблема устраняется переходом от явных схем к неявным. Для решения неявных конечно-разностных схем были разработаны методы покоординатного расщепления уравнений и методы прямой и обратной прогонки в вычислительном процессе [9],[10],[13],[14]. Следует заметить, что максимальная схемная вязкость явных схем меньше или равна минимальной схемной вязкости неявных схем [21] и часто превосходит реальную физическую вязкость в тысячи раз. В результате, задачи газовой динамики решать неявными схемами и получать адекватные решения становится очень сложно.

Третья проблема. Отсутствие эволюционного уравнения для расчета гидродинамического давления привело вычислительную гидродинамику к попыткам вообще убрать гидродинамическое давление из расчетов. Операцию по уничтожению гидродинамического давления используют в климатологии и океанологии и называют “урезание до гидростатики” уравнений переноса импульса[1],[2],[3],[9],[10].

Методика исследований

Целью исследований, результаты которых приведены в данной статье, была попытка устранения вышеперечисленных проблем в примере решения достаточно сложной гидродинамической задачи. В частности, в статье:

- рассмотрено, как используя алгоритм расчета и консервативную схему переноса консервативных примесей и импульса движения, разработанные в НИУ ТИИМСХ [18], и используя только явные конечно-разностные аппроксимации решать сложные задачи вычислительной гидромеханики;
- рассмотрен расчет движения многокомпонентной среды в цилиндрических координатах;
- рассмотрены процессы взаимодействия компонент газов между собой, с выделением тепловой энергии и влиянием этих изменений на характеристики движения потока;
- показано, как следует учитывать в расчетах сложную форму области расчета даже при наличии непроницаемых препятствий;
- показано, что для решения сложных гидродинамических задач не обязательно привлекать сложные языки программирования и сложные алгоритмы. Вполне достаточно обычных электронных таблиц EXCEL и знания встроенного в таблицы обычного языка VISUAL BASIC;
- показано, как можно получить и как использовать в расчетах эволюционное уравнение для гидродинамического давления,
- показано, как использовать только явные конечно-разностные аппроксимации, которые обладают меньшим проявлением счетной вязкости;
- показано, как следует поступать, чтобы сохранить консервативность конечно-разностной схемы переноса в цилиндрических координатах вблизи нулевого радиуса.

Рассматривается гидродинамическая задача определения скоростей, потоков массы вещества и энергии в цилиндрической области решения. При взаимодействии двигающихся компонент происходит химическая экзотермическая реакция с выделением тепла. Объектом тестирования являлся процесс в цилиндрической области, имитирующий рабочий цикл тепловых машин. При этом основной упор делается не на конструктивные особенности устройства, а на универсальность и воспроизводимость предлагаемого математического аппарата для широкого спектра инженерных расчетов.

2. Основная часть

Выпишем вместе замкнутую систему уравнений сжимаемого газа [6], [8], [11],[16],[17] для которой составим алгоритм решения

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \bullet \nabla \vec{V} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} (P + P_a) + \nu \bullet \Delta \vec{V} - \Phi \vec{V}, \quad (1)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{V} \bullet \text{grad}Q = -Q \text{div} \vec{V}, \quad (2)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \bullet \text{grad}T = \frac{\lambda}{c_v Q} \text{div} \text{grad}T - \frac{P}{c_v Q} \bullet \text{div} \vec{V} + \frac{Q}{c_v Q}, \quad (3)$$

$$P = Q \bullet R \bullet T, \text{ или } P = Q \bullet (C_p - C_v) \bullet T, \text{ или } P = Q \bullet C_v \bullet (\gamma - 1) \bullet T \quad (4)$$

где:

$\vec{V}$ – скорость $\left[\frac{m}{c}\right]$ (составляющие вектора $\vec{V} \rightarrow V_x, V_y, V_z$);

Φ – сомножитель, описывающий существование ($\Phi=100 \left[\frac{1}{c}\right]$), отсутствие ($\Phi=0 \left[\frac{1}{c}\right]$)

препятствия на пути движения потока;

ν – коэффициент кинематической вязкости для воздуха $\nu = 1.52 \cdot 10^{-5} \left[\frac{m^2}{c}\right]$;

ρ – плотность газа, для воздуха ($\rho = 1.2 \frac{kg}{m^3}$);

λ – коэффициент молекулярной теплопроводности, для воздуха $\lambda = 0.25 \left[\frac{дж}{m \bullet K \bullet c}\right]$ при температуре $20^\circ C$;

Q – внутренний источник энергии $\left[\frac{дж}{m^3 \bullet c}\right]$;

P_a – постоянное фоновое значение давления атмосферы, нормальным принимается давление атмосферы, $P_a = 101325 \left[\frac{H}{m^2}\right]$;

R – удельная газовая постоянная для воздуха, $R = 287 \left[\frac{дж}{кг \bullet K}\right]$;

$\vec{g}$ – ускорение силы гравитации, $\vec{g} = 9.81 \left[\frac{m}{c^2}\right]$;

C_p, C_v – теплоемкости воздуха при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно; Запишем и важнейшие теплофизические характеристики воздуха, которые могут оказаться полезными в дальнейшем: $C_v = 718 \left[\frac{дж}{кг \bullet K}\right]$, $C_p = 1005 \left[\frac{дж}{кг \bullet K}\right]$, $\gamma = \frac{C_p}{C_v} \approx 1.4$ – показатель адиабаты, $C_p - C_v = R$.

Возьмем полную производную по времени от обеих частей уравнения (4).

$$\frac{dp}{dt} = R \left(T \frac{dQ}{dt} + Q \bullet \frac{dT}{dt} \right) \quad (5)$$

Подставим выражения для полной производной по времени от плотности и температуры из уравнений (2) и (3) в уравнение (5)

$$\frac{dp}{dt} = R \left(-T \bullet Q \bullet \text{div} \vec{V} + Q \bullet \left[\frac{\lambda}{c_v \bullet Q} \bullet \text{div} \text{grad}T - \frac{P}{c_v Q} \bullet \text{div} \vec{V} + \frac{Q}{c_v \bullet Q} \right] \right) \quad (6)$$

Уравнение (6) эволюционное относительно величины давления. Именно это уравнение следует использовать в расчетах гидродинамических задач, в которых присутствуют внутренние источники тепловой энергии $-Q$.

Только с целью увеличения скорости вычислений уберем из уравнения (6) слагаемое, связанное с молекулярной передачей тепла. Заметим, что для уточненных расчетов это слагаемое может учитываться, не создавая никаких дополнительных вычислительных проблем, кроме некоторого увеличения времени расчета. Вторая производная с положительным знаком в правой части эволюционного уравнения считается консервативно и без проблем. Упростив получим

$$\frac{dp}{dt} = -R \bullet T \bullet Q \bullet \text{div} \vec{V} - \frac{R P}{c_v} \bullet \text{div} \vec{V} + \frac{R \bullet Q}{c_v} \quad (7)$$

Чтобы применить консервативную схему переноса НИУ ТИИМСХ [15], [18], [19], [20], и не получать дополнительно возникшее/исчезнувшее давление в результате вычислений его переноса потоком, добавим к левой и правой части уравнения (7)

$$P \bullet \text{div} \vec{V}.$$

Тогда

$$\frac{dp}{dt} + P \bullet \text{div} \vec{V} = P \bullet \text{div} \vec{V} - R \bullet T \bullet Q \bullet \text{div} \vec{V} - \frac{R \bullet P}{c_v} \bullet \text{div} \vec{V} + \frac{R \bullet Q}{c_v} \quad (8)$$

И в итоге получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \bullet \text{grad}P + P \bullet \text{div} \vec{V} = \left(P - R \bullet T \bullet Q - \frac{R \bullet P}{c_v} \right) \bullet \text{div} \vec{V} + \frac{R \bullet Q}{c_v} \quad (9)$$

Или, используя уравнение (4) запишем

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V} \bullet \text{grad} P + P \bullet \text{div} \vec{V} = - \frac{R \bullet P}{c_v} \bullet \text{div} \vec{V} + \frac{R \bullet Q}{c_v} \quad (10)$$

Левая часть уравнения (10) есть консервативный перенос давления двигающимся потоком газа. Первое слагаемое в правой части уравнения (10) обеспечивает учет нагревания или охлаждения газа за счет изменения его объема. Второе слагаемое в правой части уравнения (10) обеспечивает рост давления за счет какого-либо тепловыделения внутри двигающегося потока газа.

Добавим к уравнениям (1), (2), (3), (10) уравнения переноса газов (11) и (12).

$$\frac{\partial S_f}{\partial t} + \text{div} S_f \bullet \vec{V} = -k_1 Q \quad (11)$$

$$\frac{\partial S_o}{\partial t} + \text{div} S_o \bullet \vec{V} = -k_2 Q \quad (12)$$

где: k_1, k_2 – эмпирические коэффициенты, связывающие уменьшение концентрации

газов с выделением энергии при взаимодействии газов $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \text{с}} \frac{\text{кг}}{\text{Дж}} \right]$,

S_f, S_o – концентрации некоторых газов $\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$.

Скорость химической реакции обычно зависит от произведения концентраций взаимодействующих газов и температуры.

$$Q_r = F(S_f, S_o, T) \quad (13)$$

Формула (13) — формула, основанная на измерениях уникальных особенностей топлива и окислителя. В общем виде она описывается законом Аррениуса, который в наиболее полной и подробной форме записывается выражением (14)

$$Q = A S_f^{m1} S_o^{m2} e^{-\frac{E_a}{RT}} \quad (14)$$

где: E_a – энергия активации,

$m1, m2, A$ – эмпирические коэффициенты, характерные для газов S_f и S_o .

Коэффициент пропорциональности - A имеет размерность и размерность в неразрывной связи с показателями степеней при концентрациях в законе (14). Коэффициент - A определяется на основе экспериментов для каждой уникальной комбинации топлива и окислителя. Только для того чтобы сократить время необходимое для вычислений аппроксимируем закон Аррениуса (14) простейшей линейной связью (15).

$$Q = A \bullet S_f \bullet S_o \bullet T \quad (15)$$

В результате имеем замкнутую систему из семи уравнений (1),(2),(3),(10),(11),(12),(15) для определения семи переменных: скорости - $\vec{V}$, температуры- T , плотности - ρ , давления - P , компоненты - S_f , компоненты - S_o и скорости тепловыделения от взаимодействия компонент - Q .

Конечно-разностные схемы, расшифровка схем и пояснения.

Описание конечно-разностной схемы переноса

Все уравнения математической модели эволюционны относительно искомым переменных, кроме уравнения состояния газа, которое не может создать никаких вычислительных проблем. Все эволюционные уравнения в своей части, ответственной за консервативный перенос, имеют форму записи (16) или могут быть приведены к ней.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \text{div} \psi \bullet \vec{V} = * * * \quad (16)$$

где: ψ – искомая переменная.

Для применения разработанной консервативной схемы НИУ ТИИМСХ [15],[18] дивергентную форму записи эволюционных уравнений типа (16) следует тождественно перевести в не дивергентную форму (18). Схема переноса НИУ ТИИМСХ [15],[18] многократно проверялась на самых разных конфигурациях векторных полей. Она оказывалась консервативной и в тех случаях, когда иные схемы давали или ошибки по консервативности, или порождали вычислительные осцилляции, не имеющие отношения к реальности. Рассматривать для простоты будем только двумерные пространства. Переход в трехмерное пространство возможен и может быть сделан в полной аналогии.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\partial \psi V_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi V_y}{\partial y} + * * * \longrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \psi \frac{\partial V_x}{\partial x} - \psi \frac{\partial V_y}{\partial y} - V_x \frac{\partial \psi}{\partial x} - V_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + * * * \quad (17)$$

Запишем конечно-разностную схему, из которой алгебраическими преобразованиями легко извлекается для расчета искомая характеристика, принадлежащая расчетному временному слою - $t+1$. Выражение (18) это конечно-разностная схема НИУ ТИИМСХ [15],[18] разработанная для расчета переноса в пространстве консервативных характеристик.

$$\frac{\psi_{i,j}^{t+1} - \psi_{i,j}^t}{\Delta t} = \zeta$$

$$\text{Для коорд. ОХ} \begin{cases} -\max(0, Vx_{i,j}^t) \cdot (\psi_{i,j}^t - \psi_{i-1,j}^t) - \psi_{i,j}^{t+1} \cdot \max(0, Vx_{i+1,j}^t - \max(0, Vx_{i,j}^t)) \\ -\min(0, Vx_{i,j}^t) \cdot (\psi_{i+1,j}^t - \psi_{i,j}^t) - \psi_{i,j}^{t+1} \cdot \min(0, Vx_{i,j}^t - \min(0, Vx_{i-1,j}^t)) \end{cases}$$

$$\text{Для коорд. ОУ} \begin{cases} -\max(0, Vy_{i,j}^t) \cdot (\psi_{i,j}^t - \psi_{i,j-1}^t) - \psi_{i,j}^{t+1} \cdot \max(0, Vy_{i+1,j}^t - \max(0, Vy_{i,j}^t)) \\ -\min(0, Vy_{i,j}^t) \cdot (\psi_{i,j+1}^t - \psi_{i,j}^t) - \psi_{i,j}^{t+1} \cdot \min(0, Vy_{i,j}^t - \min(0, Vy_{i,j-1}^t)) \end{cases}$$

$$+ \zeta * \zeta_{i,j}^t$$
(18)

Переход к цилиндрическим координатам и конструкция конечных разностей.

Запишем эволюционные уравнения в самом общем виде и содержащем все возможные структурные особенности уравнений математической модели сжимаемого газа.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + D_1 \operatorname{div} \psi \bullet \vec{V} \iff -D_2 \operatorname{grad} \xi + D_3 \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi + * * *$$
(19)

где ψ, ξ – неизвестные переменные, для каждой из которых существует подобное по структуре (19) эволюционное уравнение;

D_1, D_2, D_3 – некоторые параметры характерные данному эволюционному уравнению.

В случае цилиндрических координат ряд слагаемых в эволюционных уравнениях (19) изменят свою структуру. Но не все. К примеру, в цилиндрических координатах своей градиента не изменит. Запишем в развернутом виде эволюционное уравнение (20) структурно в двумерном пространстве длины – “x” и радиуса – “r”.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + D_1 \left(\frac{\partial \psi \bullet V_x}{\partial x} + \frac{\partial r \bullet \psi \bullet V_r}{r \bullet \partial r} \right) \iff -D_2 \frac{\partial \xi}{\partial r} \left(\text{или} -D_2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + D_3 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial (x)^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) * * *$$
(20)

Запись уравнения сохранения вещества или импульса в форме (20) не пригодна для сборки расчетной схемы [15],[18] обладающей консервативностью, физической адекватностью и потому необходимы будут некоторые тождественные преобразования.

Используя правила дифференцирования произведения функций, можно получить запись (21) тождественную записи (20) причем слагаемое, соответствующее градиенту, убираем из рассмотрения для упрощения записи.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + D_1 \left(\frac{\partial \psi \bullet V_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi \bullet V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \psi \bullet V_r \right) \iff * * * + D_3 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial (x)^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial (r)^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) * * *$$
(21)

Задачи в цилиндрических координатах осесимметричны. Не осесимметричные задачи в цилиндрических координатах не записывают и не решают из-за сложностей в описании и последующей алгоритмизации.

Разберемся теперь в физическом смысле множителя $\frac{1}{r}$ в дополнительно появившихся двух слагаемых. Расчет производится заменой бесконечно малых дифференциалов $-\partial r$ на малые, но не равные нулю шаги Δr . Дифференциал по радиусу становится отличным от нуля шагом по радиусу. Пространственные поля разбиваются на расчетную сетку, состоящую из узлов, ребер и граней-ячеек. Нетрудно показать геометрией, что относительное изменение площади расчетной ячейки равно $\frac{\Delta r}{r}$ при перемещении этой ячейки ближе или дальше от оси нулевого радиуса. Ячейка, имеющая на своей границе точку, соответствующую нулевому радиусу, из криволинейного прямоугольника вырождается в сектор. Сектора, которые окружают точку нулевого радиуса, равны между собой, и это означает равенство нулю относительного изменения площадей сектора при переходе от одного сектора к другому. Это означает, что вблизи нулевого радиуса отсутствует относительное изменение площади ячеек. Это следует из осевой симметрии задачи и построенной вокруг оси симметрии симметричной расчетной сетки. Значит, в точке нулевого радиуса уравнение (21) меняет структуру и слагаемые $\frac{\psi \bullet V_r}{r}$ и $\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$ не должны учитываться в расчетах в конечных разностях. Кроме того, из симметрии задачи следует равенство нулю производных от любой переменной по направлению, перпендикулярному оси симметрии, и равенство нулю скоростей, перпендикулярных оси симметрии на этой оси, что также подчеркивает необходимость игнорирования слагаемых, содержащих теоретическую возможность появления сингулярности в точке нулевого радиуса. Для прочих расстояний расчет $\frac{\psi \bullet V_r}{r}$ не представляет труда. Для расчета слагаемого $\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$ использовались центральные разности.

Сдвинутые сетки и осреднения. Гидродинамическое давление следует считать на сдвинутых сетках. В уравнении (10) скорость переноса давления считаем как среднюю по узлам, окружающим расчетную ячейку, дивергенцию считаем по формуле (22)

$$\operatorname{div} \vec{V} \longrightarrow \left[\left(\frac{Vx_{i,j-1} - Vx_{i-1,j-1}}{\Delta x} + \frac{Vx_{i,j} - Vx_{i-1,j}}{\Delta x} \right) + \left(\frac{Vy_{i-1,j} - Vy_{i-1,j-1}}{\Delta y} + \frac{Vy_{i,j} - Vy_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \right] / 2.$$
(22)

В векторном уравнении движения (1) содержатся скалярные уравнения для расчета составляющих скорости Vx (ось X) и составляющей скорости Vy (ось Y). В этих уравнениях располагаются компоненты $\frac{\partial P}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ градиента давления **grad P**.

Предлагается следующая формула расчета градиента давления:

$$\begin{cases} \text{для компоненты } V_{x_{i,j}} \frac{\partial P}{\partial x} \rightarrow \left(\frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{\Delta x} + \frac{P_{i+1,j+1} - P_{i,j+1}}{\Delta x} \right) / 2, \\ \text{для компоненты } V_{y_{i,j}} \frac{\partial P}{\partial y} \rightarrow \left(\frac{P_{i,j+1} - P_{i,j}}{\Delta y} + \frac{P_{i+1,j+1} - P_{i+1,j}}{\Delta y} \right) / 2. \end{cases} \quad (23)$$

Схемные вязкости. Выбор на использование явных схем был сделан для упрощения расчетов, в связи с появлением консервативной схемы расчета переноса [19] и желанием уменьшить влияние схемной вязкости. Минимально схемная вязкость неявных схем равна максимальной вязкости явных схем [21]. Выбор в пользу явных схем очевиден при анализе формул (24) полученных теоретически [21].

$$v_{implicit} = \frac{V \bullet \Delta x}{2} \bullet \left(1 + \frac{V \bullet \Delta t}{\Delta x} \right) \text{ или } v_{nonimplicit} = \frac{V \bullet \Delta x}{2} \bullet \left(1 - \frac{V \bullet \Delta t}{\Delta x} \right) \quad (24)$$

Непротиворечивость начальных условий. При задании начальных условий важно, чтобы они были непротиворечивы. Любые противоречия в начальных условиях вызовут реакцию в уравнениях и вызовут всплески в скоростях (ударные волны), которые могут вывести вычислительный процесс за пределы ограничений, налагаемых параметром Куранта на соотношение шагов по времени и пространства. При неясности задания начальных условий следует начинать расчет с очень малых шагов по времени, не позволяя развиться ударным волнам в несбалансированной среде. В случае, когда решаются задачи, в которых заметно присутствует конвекция и производится учет сил гравитации, нужно помнить о задании градиента давления, способного противостоять силам гравитации, или потратить какое-то вычислительное время, чтобы этот градиент был найден. Решать можно непосредственно уравнение (1) вычисляя плотность по уравнению состояния среды (4) или подобному уравнению. Но имеется вариант избавления от слагаемых в явном виде гравитацию в уравнениях движения. Для этого следует: разбить давление на гидродинамическую и гидростатическую часть; определить изоповерхность, относительно которой считается гидростатическое давление, и, используя теорему Лейбница об дифференцировании интеграла с переменными пределами, провести тождественные преобразования, описанные и опубликованные многими авторами [6],[8],[15]. Результатом будут три составляющих векторного уравнения (1) записанные в форме (25) с отсутствием в явном виде силы гравитации.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + \vec{V} \bullet \nabla V_x &= - \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + g \rho |_{zP} \frac{\partial ZP}{\partial x} - g \int_z^{zP} \frac{\partial \rho}{\partial x} dz \right)}{\rho} + \nu \Delta V_x - \Phi V_x, \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + \vec{V} \bullet \nabla V_y &= - \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y} - g \rho |_{zP} \frac{\partial ZP}{\partial y} + g \int_z^{zP} \frac{\partial \rho}{\partial y} dz \right)}{\rho} + \nu \Delta V_y - \Phi V_y, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + \vec{V} \bullet \nabla V_z &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta V_z - \Phi V_z, \end{aligned} \quad (25)$$

Постановка задачи.

В цилиндрическую область длиной 1 метр и переменного внутреннего диаметра (в среднем диаметр равен 45 см, площадь сечения поступающего потока газа 0.0585 м^2) направляется транзитный поток газа со максимальной скоростью $1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ и общим расходом $0.0525 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$. Температура входящего транзитного потока $24 \text{ }^\circ\text{C}$. С боковых сторон в область входит газ-горючее и газ-окислитель со скоростью $0.75 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ и с расходами по $0.021 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$.

Плотности всех газов, входящих в область расчета, равны $1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Между газами происходит экзотермическая реакция, следующая закону Аррениуса.

Обычно переходят к цилиндрическим координатам для того, чтобы сократить вдвое область расчетов, полагая, что результаты по определению должны быть симметричны. Наша задача — показать инвариантность схемы НИУ ТИИМСХ, и потому центр симметрии будет проходить по центру области расчета, и рассчитывать предполагается всю область расчета полностью.

Результат, получаемый в расчетах, должен содержать симметричность, и это косвенно подтвердит инвариантность предлагаемого алгоритма расчета и, конечно, разностной схемы переноса НИУ ТИИМСХ. Одновременно будут проверяться все законы сохранения.

Результаты и обсуждения.

Прежде всего, выясним консервативность расчета. На левой части рис. 1 показано распределение потока вещества через поперечные сечения цилиндрической области расчета. Фиксируется увеличение потока массы газа после поступления компонентов горючего и окислителя в соответствии с законами сохранения. Закон сохранения массы газа выполняется, и это отражено на рис. 1 слева. В правой части рис. 1 отображены эпюры скоростей потока газов. Эпюры симметричны относительно оси цилиндрической области расчета.

На правой части рис. 1 отображено сравнение эпюр скоростей газового потока на входе и выходе из зоны расчета. В поперечном сечении у центрального препятствия в зоне расчета наблюдаем увеличение скорости почти на 40 процентов.

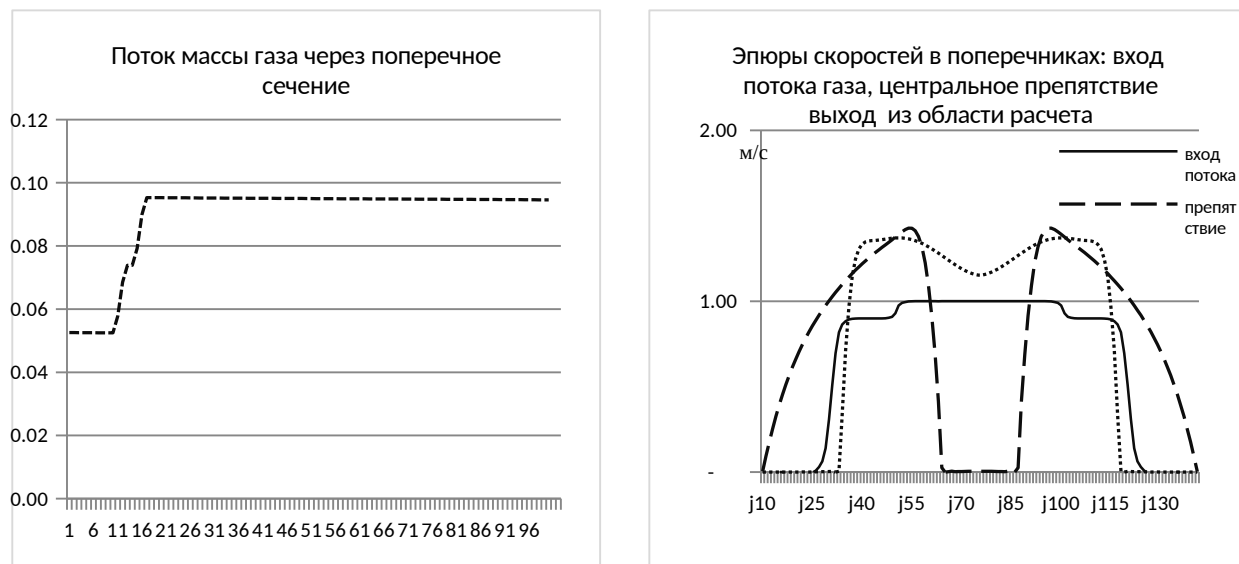


Рисунок 1. Продольный расход массы газа и эпюры скоростей в разных частях расчётной области.
Longitudinal gas mass flow rate and velocity profiles at different locations in the computational domain.

Увеличение скорости обеспечено уменьшением площади сечения и выделением энергии от взаимодействия газов перед препятствием. Выделившаяся энергия увеличивает давление, что, в свою очередь, способствует увеличению скорости движения газа. Однако самый большой импульс движения газа наблюдается у выхода из области расчета. Именно это и происходит в реальных устройствах с внутренним горением газов.

На рис. 2 отображено движение газового потока внутри цилиндрической области расчета. Цветами выделены зоны с различными значениями модулей вектора скорости.

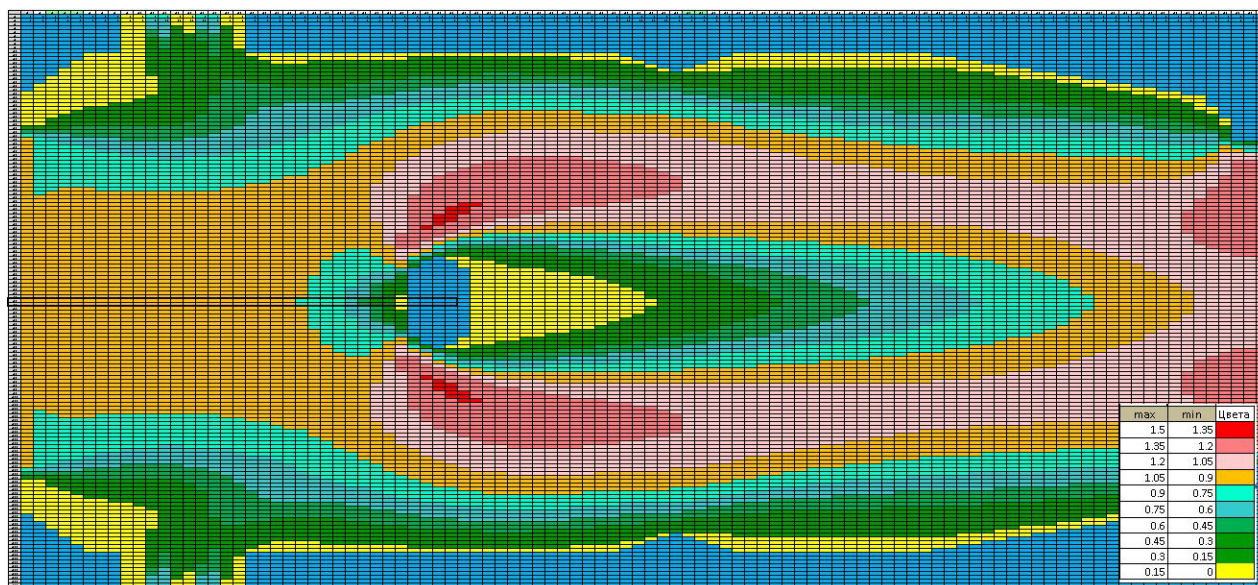


Рисунок 2. Отображение модулей скорости потока газа внутри цилиндрической расчётной области.
Gas-flow speed magnitudes in the cylindrical computational domain.

Красные цвета на рис. 2 означают зоны ускоренного движения потока. Желтый цвет характеризует зоны относительно медленно-го движения. Синий цвет – непроницаемая для потока газа зона области расчета. На рис. 2 представлена графическая интерпретация распределения модулей скоростей газового потока внутри цилиндрической области расчёта, которая позволяет детально изучить кинематическую структуру течения и оценить работоспособность алгоритма [15] при моделировании осесимметричных процессов.

Визуализация наглядно демонстрирует зоны интенсивного движения потока, где наблюдается существенное повышение скорости в суженных сечениях и зонах активного тепловыделения за счёт трансформации энергии химического взаимодействия в кинетическую энергию газа. Относительно низкие значения модулей скорости, выделенные жёлтым цветом, плавно распределяются по области, что свидетельствует об устойчивости вычислительного процесса и отсутствии нежелательных численных осцилляций. Важным аспектом является отображение непроницаемых зон синим цветом, имитирующих конструктивные элементы внутри потока; чёткость их границ подтверждает эффективность подхода к учёту сложных границ расчётной области без потери точности на контактных поверхностях [15]. Характер распределения скоростей на представленном поле демонстрирует выраженную симметрию относительно центральной оси области, что служит дополнительным подтверждением инвариантности разностной схемы

НИУ ТИИИМСХ [18]. Полученный результат подтверждает способность разработанного математического аппарата сохранять физическую адекватность при моделировании гидродинамических процессов, протекающих в устройствах со сложной внутренней конфигурацией. Использование исключительно явных аппроксимаций в сочетании с эволюционным уравнением давления позволило получить детальную картину течения, минимизировать влияние схемной вязкости [21] и обеспечивать консервативность вычислений как следствия использования схемы НИУ ТИИИМСХ [18].

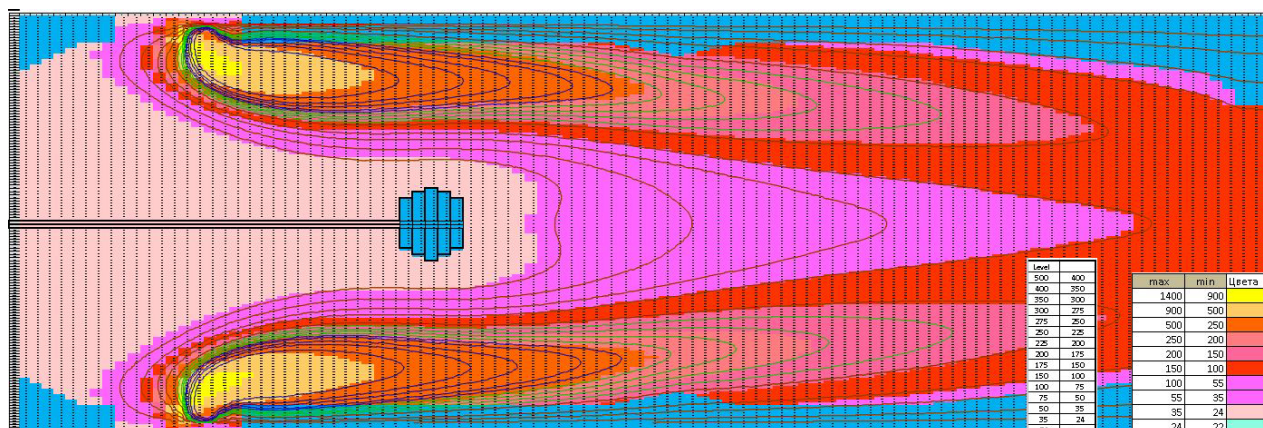


Рисунок 3. Распределение температур потока газа внутри цилиндрической расчётной области.
Gas-flow temperature distribution inside the cylindrical computational domain.

На рис. 3 изолиниями и цветовой градиентной заливкой отображено распределение температур газового потока внутри цилиндрической области расчёта, что позволяет визуализировать тепловые эффекты, возникающие при взаимодействии компонентов среды. Наиболее высокие температурные показатели, превышающие 1000°C , зафиксированы в зонах, выделенных жёлтым цветом, которые локализованы в местах интенсивного протекания экзотермических химических реакций. Характер распространения температурных фронтов демонстрирует видимую симметричность относительно центральной оси, что подтверждает физическую адекватность модели и работоспособность используемой численной схемы [18] и алгоритма расчета [15] в цилиндрической системе координат. Наблюдаемая температурная картина неразрывно связана с динамикой газового потока; выделяющаяся тепловая энергия приводит к локальному росту давления, который трансформируется в кинетическую энергию, обеспечивая ускорение газа на выходе из расчетной области. Визуализация температурных градиентов и концентрация изолиний свидетельствует о минимальном влиянии схемной вязкости и стабильности разработанного алгоритма [15] при решении гидродинамических задач со значительным тепловым выделением. Полученные результаты распределения температур почти совпадают в пространстве с зонами входа в поток взаимодействующих компонентов и их повышенной концентрации. На рис. 4 изолиниями отображено распределение произведений концентраций взаимодействующих компонентов газового потока внутри цилиндрической области расчёта, что позволяет локализовать зоны наиболее интенсивного протекания химических реакций. Визуализация показывает, что максимальные значения данной величины сосредоточены в местах впрыска горючего и окислителя, где их смешение инициирует экзотермические процессы. Как это следует из закона Аррениуса, именно в этих зонах и должно происходить наиболее интенсивное тепловыделение. Характер расположения изолиний свидетельствует о том, что интенсивность химического взаимодействия напрямую коррелирует с температурными полями и динамикой давления, обеспечивая физическую связь между химизмом процесса и кинематикой потока.

На рис. 4 изолиниями отображено значение произведения концентраций взаимодействующих компонент газового потока внутри цилиндрической области расчета.

Симметричность распределения концентраций относительно центральной оси косвенно подтверждает доказанную инвариантность предложенного алгоритма для декартовой системы координат [15], и для цилиндрических координат. В результатах расчетов полностью отсутствуют численные осцилляции при расчёте переноса многокомпонентных примесей. Использование консервативной схемы НИУ ТИИИМСХ [18] при моделировании данных полей позволило избежать необоснованного размытия границ взаимодействия компонентов, что критически важно для качественного и информативного расчёта количества тепловой энергии, выделяемой при взаимодействии компонентов в газовой смеси.

3. Заключение

В данной работе представлена полная замкнутая система уравнений Навье -Стокса для сжимаемого газа, которая дополнена уравнениями термодинамики и законами, описывающими химическое взаимодействие компонентов газа. Полученная замкнутая система уравнений описывает гидродинамические и термодинамические эффекты, возникающие в движущихся многокомпонентных смесях при химическом взаимодействии компонентов.

Научная новизна исследования заключается:

- в выводе и построение эволюционного уравнения для расчета гидродинамического давления в системе уравнений Навье-Стокса,
- в построении структуры конечно-разностных аппроксимаций для слагаемых в уравнениях переноса консервативных характеристик в цилиндрической системе координат,
- в применении в расчете сложной гидродинамической задачи достаточно простого алгоритма решения, основанного на применении только явных схем расчета.

Предложенный подход, основанный на совместном использовании консервативной схемы переноса НИУ ТИИИМСХ [18] и алгоритма расчета [15] адаптированного в данной статье под цилиндрические координаты и записанного эволюционного уравнения

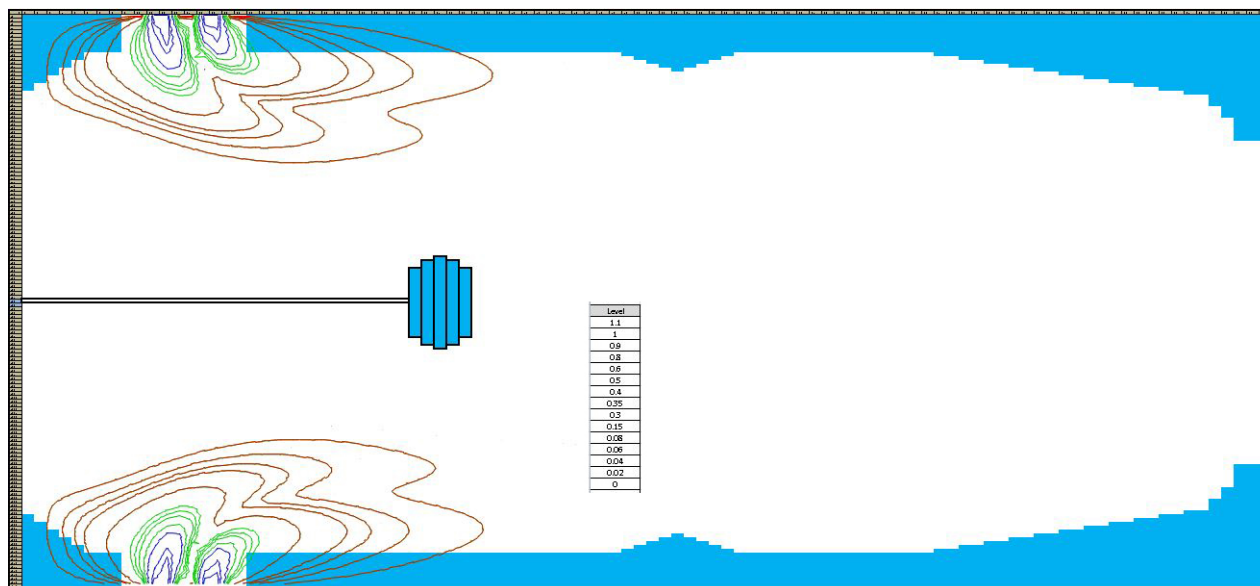


Рисунок 4. Изолинии произведений концентраций взаимодействующих компонентов газового потока внутри цилиндрической расчётной области.

Isolines of the products of interacting gas-component concentrations inside the cylindrical computational domain.

давления, учитывающего тепловые источники, продемонстрировал устойчивость в численных расчетах. При выходе на стабилизацию решения после множества итераций в расчетах наблюдается исполнение законов сохранения компонентов газа. С каждой последующей итерацией законы сохранения в расчетах исполняются с большей точностью.

Практическая значимость исследования подтверждается возможностью получать решения гидродинамических задач, используя полную систему уравнений Навье-Стокса без каких-либо упрощений. Результаты расчета при симметричном задании граничных условий для цилиндрической системы координат выглядят симметрично после множества итераций. Это является явным признаком инвариантности применяемых схем и алгоритмов расчета.

Алгоритм не требователен к программной среде. Алгоритм может успешно применяться в среде доступных инструментов, таких как MS Excel и VBA, что делает его востребованным для широкого спектра прикладных инженерных расчетов без необходимости привлечения тяжеловесных вычислительных комплексов. Полученные результаты тестовой задачи полностью соответствуют ожиданиям и физике явления. Верификация и корректировка результатов следует проводить при наличии данных экспериментальных наблюдений. В статье не было цели рассчитать конкретный объект с последующей верификацией алгоритма расчетов. В статье был показан путь, который позволяет считать сложные гидродинамические задачи о движении многокомпонентных смесей с учетом их химического взаимодействия. Причем не только в декартовых, но и цилиндрических координатах. Таким образом, статья содержит математический аппарат и алгоритм расчета, который может быть рекомендован для моделирования и расчета сложных газодинамических процессов в современных технических устройствах.

Декларации / Declarations

Вклад авторов: Рукопись содержит имена трёх авторов, но не содержит распределения индивидуальных вкладов. Необходимо получить подтверждённое всеми авторами заявление CRediT с указанием конкретных участников концептуализации, методологии, разработки и проверки численного алгоритма, визуализации, подготовки и редактирования рукописи. До получения подтверждения назначения ролей М.М., А.Г. и А.Т. не производится.

Author Contributions: The source manuscript identifies three authors but does not specify individual contributions. A CRediT statement approved by all authors is required, indicating who performed conceptualization, methodology, numerical algorithm development and validation, visualization, and manuscript drafting and editing. Roles are not assigned to M.M., A.G. or A.T. without their confirmation.

Финансирование: Сведения об источниках финансирования в представленной рукописи отсутствуют. Перед публикацией авторы должны подтвердить отсутствие внешнего финансирования либо указать финансирующую организацию и номер гранта.

Funding: The source manuscript does not disclose funding information. Before publication, the authors must confirm whether the study received no external funding or identify the funder and grant number.

Одобрение этического комитета: Не применимо: в представленной рукописи описаны математическое моделирование и численный расчёт газодинамических процессов; исследования с участием людей или животных не представлены.

Ethics Approval: Not applicable: the manuscript describes mathematical modelling and numerical simulations of gas-dynamic processes; no studies involving humans or animals are reported.

Информированное согласие и согласие на публикацию: Не применимо: исследование не включает участников-людей, персональные данные или материалы, позволяющие идентифицировать физических лиц.

Informed Consent and Consent for Publication: Not applicable: the study does not involve human participants, personal data or materials identifying individuals.

Доступность данных: Математическая модель, исходные расчётные условия и графические результаты приведены в статье. Доступность полных численных массивов, электронных таблиц и исходного программного кода не указана; авторам необходимо уточнить условия предоставления этих материалов перед публикацией.

Data Availability Statement: The mathematical model, initial simulation conditions and graphical results are reported in the article. Availability of complete numerical datasets, spreadsheets and source code is not specified; the authors should confirm the conditions for access to these materials before publication.

Благодарности: Сведения о лицах или организациях, которым следует выразить благодарность, в исходной рукописи отсутствуют. Необходимо получить подтверждение авторов об отсутствии дополнительной поддержки либо указать соответствующих участников с их согласия.

Acknowledgments: The submitted manuscript does not identify any additional individuals or organizations for acknowledgment. Author confirmation is required that no further support should be acknowledged, or the relevant contributors must be named with permission.

Конфликт интересов: Сведения о наличии или отсутствии конфликта интересов в исходной рукописи не приведены. Перед публикацией все авторы должны заявить об отсутствии конфликтов либо раскрыть соответствующие финансовые, профессиональные и иные интересы.

Conflicts of Interest: The source manuscript does not disclose whether competing interests exist. Before publication, all authors must declare that they have no conflicts of interest or disclose relevant financial, professional or other interests.

Сведения об использовании искусственного интеллекта: Генеративный ИИ применялся при редакционном переводе и подготовке проектов деклараций; требуется проверка и утверждение авторами. Использование ИИ в самом исследовании исходная рукопись не раскрывает.

Artificial Intelligence Disclosure: Generative AI assisted editorial translations and draft declarations; author verification and approval are required. The source does not disclose AI use in the underlying research.

Обозначения и сокращения

Сокращения / Abbreviations. Обозначения и сокращения, использованные в статье / Symbols and abbreviations used in the manuscript.

НИУ ТИИИМСХ / ТПАМЕ	Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства» / Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers
VBA / Visual Basic	язык программирования Visual Basic for Applications, используемый совместно с MS Excel / Visual Basic for Applications used with MS Excel
MS Excel	табличный процессор Microsoft Excel / Microsoft Excel spreadsheet software
$\vec{V}, V_x, V_y, V_z$	вектор скорости и его компоненты / velocity vector and components
ρ, P, T	плотность, давление и абсолютная температура газа / gas density, pressure and absolute temperature
ν, λ	кинематическая вязкость и молекулярная теплопроводность / kinematic viscosity and molecular thermal conductivity
R, C_p, C_v, γ	удельная газовая постоянная, теплоёмкости и показатель адиабаты / specific gas constant, heat capacities and adiabatic index
Q, S_f, S_o	тепловыделение и концентрации топлива и окислителя / heat release and fuel and oxidizer concentrations
ψ	переносимая консервативная величина / transported conservative quantity
$\Delta t, \Delta x, \Delta r$	временной и пространственные шаги разностной сетки / time and spatial finite-difference grid steps

Список литературы

- [1] Belov PN, Borisenkov EP, Panin BD. Chislennyye metody prognoza pogody [Numerical Methods of Weather Forecasting]. Leningrad: Gidrometeoizdat; 1989. (In Russian).
- [2] Betchelor D, Moffat G. Sovremennaya gidrodinamika: uspekhi i problemy [Modern Hydrodynamics: Progress and Problems]. Moscow: Mir; 1984. (In Russian).
- [3] Virts G. Chislennyye metody v dinamike zhidkosti [Numerical Methods in Fluid Dynamics]. Moscow: Mir; 1981. (In Russian).
- [4] Godunov SK. Raznostnye skhemy [Difference Schemes]. 2nd ed. Moscow: Nauka; 1977. Textbook in applied mathematics. (In Russian).
- [5] Godunov SK, Ryabenkii VS. Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem [Introduction to the Theory of Difference Schemes]. Moscow: Fizmatgiz; 1962. (In Russian).
- [6] Kochin NE, Roze NV. Teoreticheskaya gidromekhanika [Theoretical Hydromechanics]. Moscow: Fizmatgiz; 1963. (In Russian).
- [7] Kurant R, Levi G. O raznostnykh uravneniyakh matematicheskoi fiziki [On difference equations of mathematical physics]. Uspekhi Matematicheskikh Nauk. 1940;(8):125–160. (In Russian).
- [8] Landau LD. Gidrodinamika [Hydrodynamics]. 6th ed. Moscow: Fizmatlit; 2015. (In Russian).

-
- [9] Marchuk GI, Kurbatkin GP. Chislennyi prognoz pogody i Vselennaya [Numerical weather forecasting and the universe]. Zemlya i Vselennaya. 1978;37–43. (In Russian).
- [10] Marchuk GI, Penenko VV, Dymnikov VP, Gutman LN, Marchenko AS, Kontarev GR, et al. Chislennoe modelirovanie atmosferykh i okeanicheskikh protsessov [Numerical Modelling of Atmospheric and Oceanic Processes]. Novosibirsk: Nauka; 1977. Pp. 47–52. (In Russian).
- [11] Nigmatullin RI. Osnovy mekhaniki geterogennykh sred [Fundamentals of Mechanics of Heterogeneous Media]. Moscow: Nauka; 1978. (In Russian).
- [12] Roach P. Vychislitelnaya gidromekhanika [Computational Hydromechanics]. Moscow: Mir; 1980. (In Russian).
- [13] Samarskii AA. Chislennyye metody resheniya zadach konveksii-diffuzii [Numerical Methods for Convection-Diffusion Problems]. Moscow: Librokom; 2015. (In Russian).
- [14] Samarskii AA. Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem [Introduction to the Theory of Difference Schemes]. Moscow: Nauka; 1971. (In Russian).
- [15] Salokhiddinov AT, Savitskii AG, Ashirova OA, Khakimova PA, Abdumazhidov E. Algoritm resheniya polnoi sistemy uravnenii Nave–Stoksa [Algorithm for Solving the Full System of Navier–Stokes Equations]. Problemy Mekhaniki. 2025;(3):47–59. (In Russian).
- [16] Ames FW. Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering. New York: Academic Press; 1965. The source reference ends with the unverified word “Oieinia”.
- [17] Roache PJ. Verification and Validation in Fluids Engineering: Some Current Issues. ASME Journal of Fluids Engineering. 2016;138(10):101205.
- [18] Salokhiddinov A, McKinney D, Savitsky A, Ashirova O, Radkevich M. Improving finite-difference schemes in the context of Navier–Stokes hydrodynamic calculations: A conservative approach to solving transfer equations. Edelweiss Applied Science and Technology. 2025;9(7):162–175. <https://doi.org/10.55214/25768484.v9i7.8557>.
- [19] Salokhiddinov A, Savitsky A, McKinney D, Ashirova O. An improved finite-difference scheme for the conservation equations of matter. E3S Web of Conferences. 2023;386:06002. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202338606002>.
- [20] Salokhiddinov A, Savitsky A, Radkevich M, Ashirova O. Possibilities of solving two-dimensional hydrodynamic problems on the basis of the non-divergent form of recording the transport and conservation equations. E3S Web of Conferences. 2023;434:01001. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202343401001>.
- [21] Salokhiddinov A, Savitsky A, McKinney D, Ashirova O. Estimating Scheme Viscosity for Small-Scale Circulation with Implicit Finite-Difference Schemes. E3S Web of Conferences. 2023. Available from: https://www.e3s-conferences.org/articles/e3sconf/abs/2023/38/e3sconf_conmechhydro23_02030/e3sconf_conmechhydro23_02030.html.
- [22] Cai Z, Wang C, Zhang S. Mixed Finite Element Methods for Incompressible Flow: Stationary Navier–Stokes Equations. SIAM Journal on Numerical Analysis. 2009. <https://doi.org/10.1137/080718413>.

Отказ от ответственности / Примечание издателя

Утверждения, мнения и данные во всех публикациях принадлежат исключительно отдельным авторам и участникам и не обязательно отражают взгляды издателя, журнала или редакторов. Издатель, журнал и редакторы не несут ответственности за вред людям или ущерб имуществу, возникший вследствие использования идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в тексте.

Disclaimer of Liability/Publisher’s Note

The statements, opinions, and data contained in all publications are solely those of the individual author(s) and contributor(s) and do not necessarily reflect the views of the Publisher, the Journal, or the editors. The Publisher, the Journal, and the editors disclaim responsibility for any injury to persons or damage to property resulting from any ideas, methods, instructions, or products referred to in the content.