

УДК 539.3

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НА ОСНОВЕ БИМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ*

Усаров М. К., Аскарходжаев Ш. И., Усанов Ф. А.

umakhamatali@mail.ru; shuhrat1608@gmail.com; usanovfurqat94@mail.ru

Институт механики и сейсмостойкости сооружений им.М.Т.Уразбаева АН РУз, Ташкент,
Узбекистан.

В статье рассмотрена динамическая задача поперечных колебаний прямоугольной пластины на упругом основании, со всеми закрепленными сторонами, под действием нормальных нагрузок, приложенных по её лицевой поверхности на основе бимоментной теории пластин. В рамках метода конечных разностей разработана методика динамического расчета напряжений и перемещений пластины на упругом основании. Приведены численные результаты и проведено сравнение с результатами задач для пластин, не имеющих упругого основания.

Ключевые слова: Пластина, упругое основание, нормальная нагрузка, перемещения, напряжения, моменты, бимоменты, уравнения движения, граничные условия, метод конечных разностей.

Цитирование: *Усаров М. К., Аскарходжаев Ш. И., Усанов Ф. А.* Поперечные колебания на основе бимоментной теории прямоугольной пластины на упругом основании // Проблемы механики. – 2026. – № 2(36). – С. 47-59.

1 Введение

Теория пластин и оболочек развита как один из основных фундаментальных разделов механики деформируемого твердого тела. Существуют многочисленные научные статьи, монографии и учебники, посвященные задачам изгиба, устойчивости и колебания балок, пластин и оболочек из ортотропного материала.

Активное изучение вопросов расчёта пластинчатых сооружений, расположенных на упругом основании, началось во второй половине XX века в связи с необходимостью обеспечения надёжности и безопасности инженерных сооружений в сейсмоактивных районах. В рамках данных исследований особый интерес представляют прямоугольные пластинчатые сооружения с полностью защемлённым контуром, которые широко применяются в современном гражданском и промышленном строительстве. Подобные конструкции используются в качестве плит перекрытий, элементов фундаментных систем, а также в составе различных инженерных и технологических объектов, работающих в условиях сложного силового и динамического воздействия. В реальных условиях эксплуатации пластинчатые сооружения подвергаются действию нагрузок, которые часто имеют периодический характер и могут изменяться в широком диапазоне частот. Известно, что при совпадении частоты внешнего воздействия с собственной частотой колебаний конструкции возникает резонансное состояние, приводящее к резкому увеличению амплитуд колебаний и росту напряжений. Данное явление существенно повышает риск накопления повреждений и может вызвать преждевременное разрушение пластинчатого сооружения. Особую роль в формировании динамического поведения конструкции играет взаимодействие пластины с упругим основанием, а также условия жёсткого закрепления её контура.

*Работа выполнена в рамках бюджетной темы фундаментальных исследований.

Учет этих факторов требует применения уточнённых теоретических моделей и эффективных численных методов расчёта. В последние годы данная проблема активно исследуется, однако, ряд аспектов, связанных с использованием бимоментной теории пластин, изучено недостаточно. В настоящей работе на основе анализа современных научных исследований сформулирована и решена задача поперечных колебаний прямоугольная пластина на упругом основании под действием нормальных нагрузок, что определяет научную новизну и практическую значимость полученных результатов.

В статье [1] построены аналитические выражения для вычисления собственных частот и форм изгибных колебаний квадратной однородной пластины, защемленной по контуру. Дана оценка погрешности путем сравнения с известными высокоточными расчетами. Выполнено также сравнение результатов аналитических расчетов с экспериментальными данными, полученными автором резонансным методом. Предложенная методика исследования и алгоритм расчета могут быть использованы для изучения изгибных колебаний пластин при других типах граничных условий. В работе [2] рассматриваются вынужденные колебания нелинейной пластины на вязкоупругом основании типа Винклера при действии гармонической движущейся нагрузки. Получены зависимости динамического отклика пластины от параметров нагрузки и характеристик основания, что может быть полезно для оценки вибраций плитных конструкций на грунте. В статье [3] на нескольких примерах показано, что с помощью метода интерполяции по коэффициенту формы можно достаточно просто определять величину максимального прогиба прямоугольных пластинок со сложными граничными условиями, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой. В основе метода интерполяции по коэффициенту формы лежит изопериметрический метод. Основным аргументом в получаемых аналитических зависимостях является отношение коэффициента формы к площади области. Для любой ограниченной области рассматриваемая краевая задача при заданных опорных условиях имеет решение. В статье [4] изучена изгибная устойчивость однородной пластины, сжатой в своей плоскости и лежащей на упругом основании. Между пластиной и основанием есть упругий слой. В случае однородного равномерного сжатия линейное приближение не отвечает на вопрос о форме уступа. Геометрически нелинейный подход приводит к выводу, что форма уступа имеет шахматный характер. Диссертационная работа [5] посвящена динамическим и статическим задачам балок и пластин постоянной и переменной толщины в рамках классической теории изгиба и колебаний Тимошенко. Рассмотрены свободные и вынужденные колебания балок, круговых и прямоугольных пластин. Определены собственные частоты и формы колебаний, а также область применения теории Тимошенко. В статье [6] приведены вынужденные колебания вязкоупругой трехслойной пластины определенного типа и некоторые задачи с применением численных решений. Реализованы методы, алгоритмы и программы для получения резонансных частот и анализа вибраций для прямоугольной вязкоупругой трехслойной пластины. Изучены колебания пластины и некоторые характерные особенности. Также приведены граничные условия на краях трехслойной пластины в отношении перемещений и напряжений. В статье [7] разработан метод решения трехмерной задачи изгиба и колебаний ортотропных пластин переменной толщины. Решение поставленной задачи основано на двух способах разложения перемещений в бесконечные ряды. В результате задача сводится к решению двух независимых задач, каждая из которых записывается в виде бесконечной системы уравнений. Монография [8] посвящена созданию новой бимоментной теории толстых пластин без

привлечения упрощающих гипотез, с учетом не только сил, моментов, но и бимоментов, которые порождаются за счет нелинейного закона распределения перемещений, деформаций и напряжений в поперечных сечениях пластины. Учтены все компоненты тензора деформаций и напряжений. Статья [9] посвящена решению задачи динамического изгиба ортотропной пластины на упругом основании с применением бимоментной теории пластин, разработанной в рамках трехмерной динамической теории упругости. Рассмотрены примеры и получены численные результаты. Работа [10] посвящена разработке новой теории толстых пластин с учетом внутренних сил, моментов и бимоментов. Построено точное решение продольного и поперечного колебания толстой пластины под действием динамической синусоидальной (косинусоидальной) нагрузки. Статья [11] посвящена усовершенствованию теории пластин с целью учета сил, моментов и бимоментов, порождаемых за счет нелинейного закона распределения перемещений в поперечном сечении пластины. Приведены интегральные соотношения для определения сил, моментов и бимоментов.

В качестве примера приведено решение задачи изгиба толстой ортотропной пластины под действием поперечной синусоидальной нагрузки. Получены численные результаты перемещений, сил, моментов, бимоментов и напряжений, сопровождаемые анализом. В статьях [12-14] о динамических моделях зданий предложена модель непрерывной пластины в виде консольной ортотропной пластины, разработанная в рамках бимоментной теории и теории пластин Тимошенко, описывающей сейсмические колебания зданий. Приведены формулы для определения приведенных модулей упругости, сдвига и плотности модели пластины здания. Получены численные значения приведенных модулей упругости для конкретного многоэтажного здания. Работа [15] посвящена разработке новой теории толстых пластин с учетом внутренних сил, моментов и бимоментов. Построено точное решение продольного и поперечного колебания толстой пластины под действием динамической синусоидальной (косинусоидальной) нагрузки. В статье рассмотрены поперечные колебания пластин на упругом основании в рамках бимоментной теории пластин, созданной в рамках теории упругости без учета упрощающих гипотез [8, 9].

2 Постановка задачи

Рассмотрим ортотропную толстую пластину постоянной толщины $H=2h$, и размерами a, b в плане. Для ортотропных тел имеем 9 упругих постоянных. Приведем некоторые сведения из [8] об упругих характеристиках ортотропных материалов. Введем следующие обозначения: E_1, E_2, E_3 – модули упругости; G_{12}, G_{13}, G_{23} , – модули сдвига; $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$, – коэффициенты Пуассона материала пластины. Для трансверсально-изотропного материала число упругих постоянных сокращается до пяти: $E_1 = E_2, E_3, G_{13} = G_{23}, G_{12}, \nu_{13} = \nu_{12}, \nu_{12}$, так как $G_{12} = E_1/(2*(1+\nu_{12}))$. Для изотропного материала число упругих постоянных сокращается до двух: $E_1 = E_2 = E_3 = E, G_{13} = G_{23} = G_{12} = G, \nu_{13} = \nu_{12} = \nu$, так как $G_{13} = G_{23} = G_{12} = G = E/(2*(1+\nu))$. Чтобы определить напряжения через деформации, необходимо найти следующие упругие постоянные $E_1, E_2, \dots, E_3$, определяемые через коэффициенты Пуассона и модули упругости:

$$\begin{cases} E_{11} = E_1 g_{11}, E_{22} = E_2 g_{22}, & E_{33} = E_3 g_{33}, \\ E_{12} = E_{21} = E g_{12} = E_2 g_{21}, \\ E_{13} = E_{31} = E_1 g_{13} = E_3 g_{31}, & E_{23} = E_{32} = E_2 g_{23} = E_3 g_{32}, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\begin{cases} g_{11} = \frac{1 + \nu_{23}\nu_{32}}{1 - \mu^2}, & g_{22} = \frac{1 + \nu_{13}\nu_{31}}{1 - \mu^2}, & g_{33} = \frac{1 + \nu_{12}\nu_{21}}{1 - \mu^2}, \\ g_{12} = g_{21} = \frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{23}}{1 - \mu^2} = \frac{\nu_{21} + \nu_{21}\nu_{32}}{1 - \mu^2}, \\ g_{13} = g_{31} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{1 - \mu^2} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{1 - \mu^2}, \\ g_{23} = g_{32} = \frac{\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{12}}{1 - \mu^2} = \frac{\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{21}}{1 - \mu^2}, \\ \mu^2 = \nu_{12}\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{32} + \nu_{13}\nu_{31} + 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}, \end{cases} \quad (2)$$

Для описания движения пластины введем декартовую систему координат с переменными x_1, x_2 и z , показано на рис. 1. Начало координат расположено в срединной поверхности пластины. Ось OZ направим вниз.

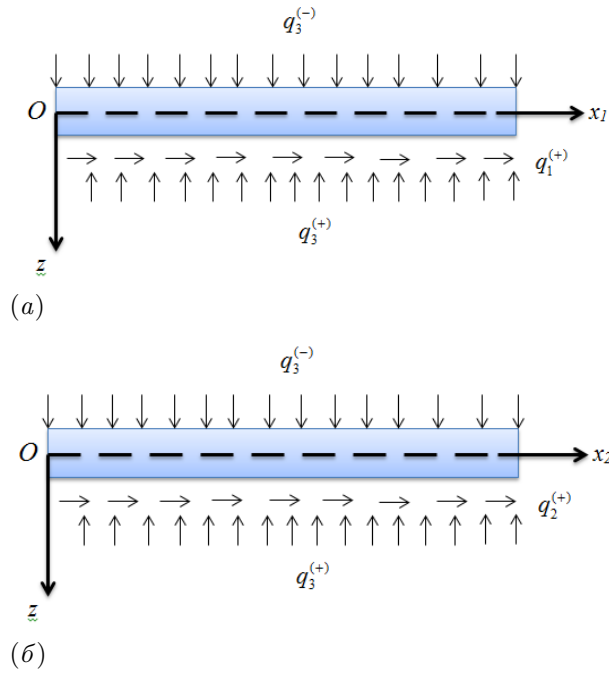


Рис. 1 Прямоугольная пластина на упругом основании под действием нормальной и касательной нагрузок: а) вид пластины со стороны оси Ox_2 , б) вид пластины со стороны оси Ox_1 .

Пусть по верхней лицевой поверхности $z = -h$ приложены поверхностные нагрузки $q_1^{(-)}, q_2^{(-)}, q_3^{(-)}$ в направлениях координатных осей. По нижней лицевой поверхности пластины $z = +h$ действуют распределенные поверхностные нормальные и касательные контактные напряжения $q_1^{(+)}, q_2^{(+)}, q_3^{(+)}$ между пластиной и упругим основанием по соответствующим направлениям осей координат (Рис.1).

Бимоментная теория пластин, разработанная в [8], базируется на известных соотношениях Коши, обобщенном законе Гука, трехмерных уравнениях общей теории упругости и граничных условиях. Согласно бимоментной теории моменты, силы, и бимоменты представляются девятью неизвестными функциями, определяемыми сле-

дующими формулами:

$$\begin{cases} \widetilde{W}_1 = \frac{u_3^{(+)} - u_3^{(-)}}{2}, & \widetilde{r} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_3 z dz, & \widetilde{\gamma} = \frac{1}{2h^3} \int_{-h}^h u_3 z^2 dz, \\ \widetilde{u}_k = \frac{u_k^{(+)} + u_k^{(-)}}{2}, & \widetilde{\psi}_k = \frac{1}{2h^2} \int_{-h}^h u_k z dz, & \widetilde{\beta}_k = \frac{1}{2h^4} \int_{-h}^h u_k z^3 dz, \end{cases} \quad (k = 1, 2). \quad (3)$$

Представим грузовые члены системы уравнений изгибных колебаний [8], определяемых внешними силами, в виде:

$$\begin{cases} \widetilde{q}_k = \frac{q_k^{(+)} + q_k^{(-)}}{2}, & (k = 1, 2), & \widetilde{q}_3 = \frac{q_3^{(+)} - q_3^{(-)}}{2}, \end{cases} \quad (4)$$

Отметим что, учет нелинейности распределения перемещений в поперечных сечениях и всех видов компонентов тензора деформаций, напряжений требует введения в рассмотрение бимоментов. В данной работе предложены аналитические формулы для определения сил, моментов и бимоментов в поперечных сечениях.

В качестве уравнения движения пластин принимаем уравнения бимоментной теории [8]. Уравнения движения пластины относительно изгибающих, крутящих моментов и перерезывающих сил запишутся в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_{13} + H\widetilde{q}_1 = \frac{H^2}{2} \rho \ddot{\psi}_1, \\ \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_{23} + H\widetilde{q}_2 = \frac{H^2}{2} \rho \ddot{\psi}_2. \end{cases} \quad (5)$$

где ρ -плотность материала пластины.

Уравнение относительно перерезывающих сил имеет вид:

$$\left\{ \frac{\partial Q_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{23}}{\partial x_2} + 2\widetilde{q}_3 = H\rho \ddot{r}. \right. \quad (6)$$

Изгибающие, сдвигающие моменты M_{11} , M_{22} , M_{12} и перерезывающие силы Q_{13} , Q_{23} определяются следующим образом.

Выражения изгибающих и сдвигающих моментов имеют вид:

$$\begin{cases} M_{11} = \int_{-h}^h \sigma_{11} z dz = \frac{H^2}{2} \left(E_{11} \frac{\partial \widetilde{\psi}_1}{\partial x_1} + E_{12} \frac{\partial \widetilde{\psi}_2}{\partial x_2} - E_{13} \frac{2(\widetilde{r} - \widetilde{W})}{H} \right), \\ M_{22} = \int_{-h}^h \sigma_{22} z dz = \frac{H^2}{2} \left(E_{12} \frac{\partial \widetilde{\psi}_1}{\partial x_1} + E_{22} \frac{\partial \widetilde{\psi}_2}{\partial x_2} - E_{23} \frac{2(\widetilde{r} - \widetilde{W})}{H} \right), \\ M_{12} = M_{21} = \int_{-h}^h \sigma_{12} z dz = G_{12} \frac{H^2}{2} \left(\frac{\partial \widetilde{\psi}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \widetilde{\psi}_2}{\partial x_1} \right). \end{cases} \quad (7)$$

Выражения для перерезывающих сил запишутся в виде:

$$\begin{cases} Q_{13} = \int_{-h}^h \sigma_{13} z dz = G_{13} \left(2\widetilde{u}_1 + H \frac{\partial \widetilde{r}}{\partial x_1} \right), \\ Q_{23} = \int_{-h}^h \sigma_{23} z dz = G_{23} \left(2\widetilde{u}_2 + H \frac{\partial \widetilde{r}}{\partial x_2} \right). \end{cases} \quad (8)$$

Уравнения относительно бимоментов при изгибе и поперечном сдвиге получаются в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{12}}{\partial x_2} - 3H\tilde{p}_{13} + H\tilde{q}_1 = \frac{H^2}{2}\rho\ddot{\beta}_1, \\ \frac{\partial P_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{22}}{\partial x_2} - 3H\tilde{p}_{23} + H\tilde{q}_2 = \frac{H^2}{2}\rho\ddot{\beta}_2, \\ \frac{\partial \tilde{p}_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{p}_{23}}{\partial x_2} - \frac{4\tilde{p}_{33}}{H} + \frac{2\tilde{q}_3}{H} = \rho\ddot{\gamma}. \end{cases} \quad (9)$$

Бимоменты P_{11} , P_{22} и P_{12} порождаемые при изгибе и сдвиге пластины, определяются по следующим формулам:

$$\begin{cases} P_{11} = \int_{-h}^h \sigma_{11} z^3 dz = \frac{H^2}{2} \left(E_{11} \frac{\partial \tilde{\beta}_1}{\partial x_1} + E_{12} \frac{\partial \tilde{\beta}_2}{\partial x_2} - E_{13} \frac{2(3\tilde{\gamma} - \tilde{W})}{H} \right), \\ P_{22} = \frac{1}{h^2} \int_{-h}^h \sigma_{22} z dz = \frac{H^2}{2} \left(E_{12} \frac{\partial \tilde{\beta}_1}{\partial x_1} + E_{22} \frac{\partial \tilde{\beta}_2}{\partial x_2} - E_{13} \frac{2(3\tilde{\gamma} - \tilde{W})}{H} \right), \\ P_{12} = P_{21} = \frac{1}{h^2} \int_{-h}^h \sigma_{12} z dz = \frac{H^2}{2} A_2 \left(\frac{\partial \tilde{\beta}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{\beta}_2}{\partial x_1} \right). \end{cases} \quad (10)$$

Интенсивности поперечных касательных и нормальных бимоментов $\tilde{p}_1\tilde{z}$, $\tilde{p}_2\tilde{z}$, и $\tilde{p}_3\tilde{z}$ определяются выражениями:

$$\begin{cases} \tilde{p}_{k3} = G_{k3} \left(\frac{2\tilde{u}_k - 4\tilde{\psi}_k}{H} + \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial x_k} \right), & (k = 1, 2), \\ \tilde{p}_{33} = E_{31} \frac{\partial \tilde{\gamma}_1}{\partial x_1} + E_{32} \frac{\partial \tilde{\gamma}_2}{\partial x_2} - E_{33} \frac{2(\tilde{r} - \tilde{W})}{H}. \end{cases} \quad (11)$$

Уравнения (5), (6) и (9) образуют взаимосвязанную систему из шести уравнений относительно девяти неизвестных функций $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{r}, \tilde{\gamma}, \tilde{W}$.

В уравнениях (5), (6) и (9) содержатся девять неизвестных функций, что недостаточно для получения единственного решения сформулированной задачи. Для обеспечения однозначности решения необходимо ввести ещё три дополнительных уравнения. С целью построения недостающих соотношений разложим перемещения u в ряд Маклорена. В результате будут получены уравнения для задачи изгибных колебаний.

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{12}}{\partial x_2} + \frac{\tilde{\sigma}_{13}^*}{H} = \rho \ddot{u}_1, \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{22}}{\partial x_2} + \frac{\tilde{\sigma}_{23}^*}{H} = \rho \ddot{u}_2, \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{32}}{\partial x_2} + \frac{\tilde{\sigma}_{33}^*}{H} = \rho \ddot{W}. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь $\tilde{\sigma}_{11}, \tilde{\sigma}_{12}, \tilde{\sigma}_{22}$, определяются из закона Гука с учетом условий на лицевых поверхностях:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = E_{11}^* \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + E_{12}^* \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} + \frac{E_{13}}{E_{33}} \tilde{q}_3, \\ \sigma_{22} = E_{12}^* \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + E_{12}^* \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} + \frac{E_{23}}{E_{33}} \tilde{q}_3, \\ \sigma_{12} = G_{12} \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} \right), \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \frac{\tilde{\sigma}_{3k}^*}{H} = G_{k3} \frac{210 \left(33\tilde{\beta}_k - 9\tilde{\varphi}_k - 4\tilde{u}_k \right)}{H^2} + G_{k3} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\tilde{q}_3}{E_{33}} - \frac{E_{31}}{E_{33}} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} - \frac{E_{31}}{E_{33}} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} \right) + \\ + \frac{42}{H} \left(\tilde{q}_k - G_{k3} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_k} \right), \\ \frac{\tilde{\sigma}_{33}^*}{H} = E_{33} \frac{210 \left(9\tilde{\gamma} - 2\tilde{W} - \tilde{r} \right)}{H^2} + E_{31} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\tilde{q}_1}{G_{13}} - \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_1} \right) + \\ + E_{32} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\tilde{q}_2}{G_{23}} - \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_2} \right) + \frac{30}{H} \left(\tilde{q}_3 - E_{31} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} - E_{32} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} \right). \end{cases} \quad (k = 1, 2), \quad (14)$$

Силы реакции упругого основания, возникающие на лицевой поверхности пластины, то есть в плоскости $z = h$, определяются следующим образом [8, 9]:

$$\left\{ q_1^{(+)} = k_1 u_1^{(+)}, \quad q_2^{(+)} = k_2 u_2^{(+)}, \quad q_3^{(+)} = k_3 u_3^{(+)} \right. \quad (15)$$

где k_1, k_2, k_3 - коэффициенты постели у пружинного основания.

Перемещения u_j^-, u_j^+ , ($j = 1, 2, 3$) на лицевых поверхностях пластины $z = -h$ и $z = h$ определяются по формулам в виде:

$$\begin{cases} u_k^{(+)} = \bar{u}_k + \tilde{u}_k, & u_k^{(-)} = \bar{u}_k - \tilde{u}_k, \\ u_3^{(+)} = \bar{W} + \tilde{W}, & u_3^{(-)} = \bar{W} - \tilde{W}, \end{cases} \quad (k = 1, 2) \quad (16)$$

Предположим, что на пластину действует внешняя равномерно распределенная поверхностная нормальная динамическая периодическая нагрузка q_3^- в направлении оси в виде функции Хэвисайда, приложенной соответственно к лицевой поверхности $z = -h$:

$$\left\{ q_1^{(-)} = 0, \quad q_2^{(-)} = 0, \quad q_3^{(-)} = \begin{cases} 0, & \text{при } t \leq 0 \\ -q_0 \sin(\omega_0 t), & \text{при } t > 0. \end{cases} \right. \quad (17)$$

где q_0 - параметр нагрузки; t - время.

При решении задачи колебаний пластин на упругом основании считаем, что обобщенные перемещения $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{W}$, малы по сравнению с обобщенными перемещениями $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{W}$. Это допущение обеспечивает независимость второй задачи изгиба и колебаний пластин от первой задачи, описывающей растяжение-сжатие с учетом поперечного сжатия пластины, что облегчает построение решения поставленной задачи.

Подстановка (16) в (15) позволяет получить выражения для грузовых членов уравнения движения пластины [8]. Тогда, вместо выражения (15), получим следующие выражения для контактных сил:

$$\left\{ \tilde{q}_1 = \frac{k_1}{2} \tilde{u}_1 + q_1^{(-)}, \quad \tilde{q}_2 = \frac{k_2}{2} \tilde{u}_2 + q_2^{(-)}, \quad \tilde{q}_3 = \frac{k_1}{2} \tilde{W} + q_3^{(-)}. \right. \quad (18)$$

В качестве уравнений движения пластинчатой модели сооружения приняты уравнения изгибно-сдвиговых колебаний, которые запишутся относительно сил, моментов и бимоментов, а также на основе кинематических уравнений (3), (4), (7) и (8).

Граничные условия. Граничные условия бимоментной теории также имеют высокую точность. Если на краю пластины перемещения равны нулю, то имеем:

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\psi}_1 &= 0, & \tilde{\psi}_2 &= 0, & \tilde{\beta}_1 &= 0, & \tilde{\beta}_2 &= 0, \\ \tilde{r} &= 0, & \tilde{\gamma} &= 0, & \tilde{u}_1 &= 0, & \tilde{u}_2 &= 0, & \tilde{W} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (19)$$

Если край пластины свободен от опор, то граничные условия имеют вид:

$$\left\{ \begin{aligned} M_{11} &= 0, & M_{12} &= 0, & P_{11} &= 0, & Q_{13} &= 0, & \tilde{p}_{13} &= 0, \\ \tilde{\sigma}_{11} &= 0, & \tilde{\sigma}_{12} &= 0, & \tilde{\sigma}_{11}^* &= 0, & & & & \end{aligned} \right. \quad (20)$$

Если край пластины оперт, то имеем следующие граничные условия:

$$\left\{ \begin{aligned} M_{11} &= 0, & M_{12} &= 0, & P_{11} &= 0, & P_{12} &= 0, \\ \tilde{\sigma}_{11} &= 0, \tilde{\sigma}_{12} &= 0, & \tilde{r} &= 0, & \tilde{\gamma} &= 0, & \tilde{W} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (21)$$

3 Метод решения

С применением конечно-разностного подхода сформирована методика численного динамического моделирования напряжений и перемещений пластины, взаимодействующей с упругим основанием, при различных постановках краевых условий. Значения перемещений во внутренних узлах расчётной области определяются на основе центральных разностных аппроксимаций. Численный алгоритм решения задачи колебаний пластины под действием нормальных нагрузок, как указывалось выше, разработан в рамках метода конечных разностей. Производные перемещений по пространственным координатам аппроксимируются центральными разностными соотношениями. Для вычисления производных напряжений, внутренних усилий, изгибающих моментов и бимоментов используются центральные конечно-разностные схемы, заданные на промежуточных узлах сетки и обеспечивающие второй порядок точности.

Производные от функций обобщенных перемещений в центральной точки разбиения определяем по формулам центральной разности

$$\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x_1}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta x_1}. \right. \quad (22)$$

При аппроксимации производных от напряжений, сил, моментов и бимоментов используются центральные конечно-разностные схемы на полушагах, которые имеют второй порядок точности:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F_{i,j}^k}{\partial x_1} &= \frac{F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j}}{\Delta x_1}, \\ \frac{\partial F_{i,j}^k}{\partial x_2} &= \frac{F_{i,j+1/2} - F_{i,j-1/2}}{\Delta x_2}, \end{aligned} \right. \quad (i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M) \quad (23)$$

Вторую производную функции по времени в рамках метода конечных разностей представим в виде:

$$\left\{ \frac{\partial^2 f_{i,j}^k}{\partial x_1^2} = \frac{f_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^k + f_{i,j}^{k-1}}{\Delta t^2} \right. \quad (24)$$

где Δt – шаг по времени.

При реализации численного метода решения поставленной задачи шаги по пространственным координатам и времени выбираем следующим образом:

$$\left\{ \Delta x_1 = a/N, \quad \Delta x_2 = b/M, \quad c\Delta t \leq \min(\Delta x_1, \Delta x_2) \right. \quad (25)$$

Здесь $\Delta x_1 = a/N, \Delta x_2 = b/M$ – шаг вычисления метода сеток.

Реализация вычислительной процедуры для определения перемещений и силовых характеристик пластины выполнена в алгоритмической среде Delphi.

4 Анализ результатов

Считаем, что пластина из железобетона, модуль упругости которого $E = 2000 \text{ МПа}$, плотность $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$, и коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Размеры пластины: толщина, длина и высота сооружения, соответственно приняты равными $H = 1 \text{ м}, a = 10 \text{ м}, b = 10 \text{ м}$. Предполагаем, что прямоугольная пластина на упругом основании, со всеми закрепленными сторонами и размерами в плане a и b , толщиной H , подвергается воздействию нормальной нагрузки, приложенной по его лицевой поверхности. В этом случае граничные условия определяются из формулы (18). Пластина разделена на малые элементы размерами $N = M = 20$.

Представим результаты расчетов перемещений и напряжений пластины, полученные в зависимости от значений коэффициента постели k_1, k_2, k_3 . Максимальные значения перемещений $\tilde{r}$ и напряжений σ_{11}/q_0 пластин получены с учетом и без учета упругого основания.

1) Пластина на упругом основании, где коэффициент постели упругого основания $k_1 = k_2 = 0, k_3 = 0.005$ и $k_3 = 0.01$.

2) Пластина без упругого основания, $k_3 = 0$ при первом значении частоты внешнего воздействия ω_0 . Посредством этого можно сравнивать результаты пластин в двух различных условиях.

На рисунке 2 показан график изменения нормального перемещения r в зависимости от времени t , где коэффициент постели упругого основания $k_{33} = 0$.

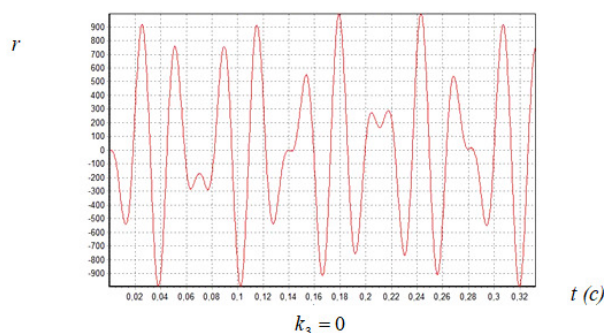


Рис. 2 График изменения нормального перемещения r в зависимости от времени t , где коэффициенты постели упругого основания $k_{33} = 0$.

На рисунке 3 показан график изменения нормального перемещения r в зависимости от времени t , где коэффициент постели упругого основания $k_{33} = 0.01$.

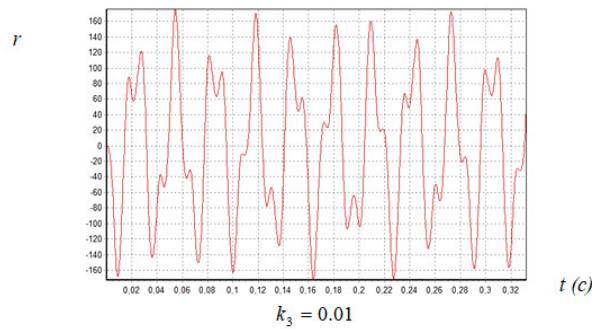


Рис. 3 Графики изменения нормального перемещения r в зависимости от времени t , где коэффициенты постели упругого основания $k_{33} = 0.01$.

На рисунке 4 показан график изменения нормального напряжения σ_{11}/q_0 , в зависимости от времени t , где коэффициент постели упругого основания $k_{33} = 0$.

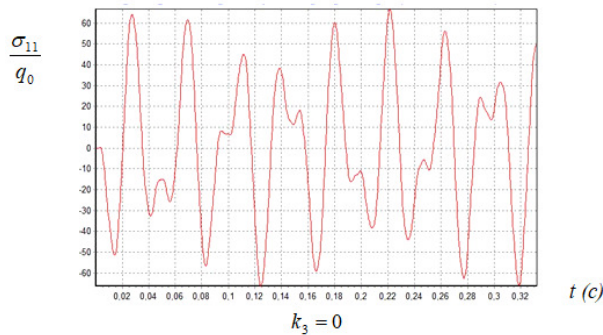


Рис. 4 График изменения нормального напряжения σ_{11}/q_0 , в зависимости от времени t , где коэффициент постели упругого основания $k_{33} = 0$.

На рисунке 5 показан график изменения нормального напряжения σ_{11}/q_0 , в зависимости от времени t , где коэффициент постели упругого основания $k_{33} = 0.01$.

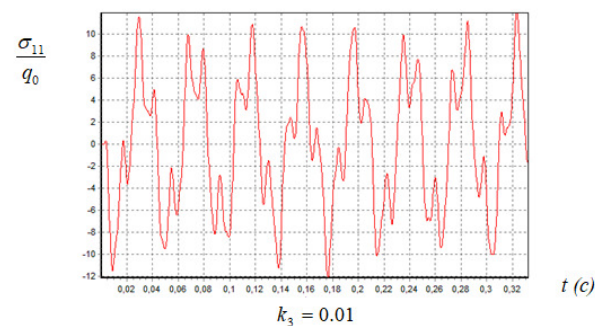


Рис. 5 График изменения нормального напряжения σ_{11}/q_0 , в зависимости от времени t , где коэффициент постели упругого основания $k_{33} = 0.01$.

На рисунках 6 и 7 приведены формы колебаний перемещения r и напряжения σ_{11}/q_0 в координатах x_1, x_2 и z .

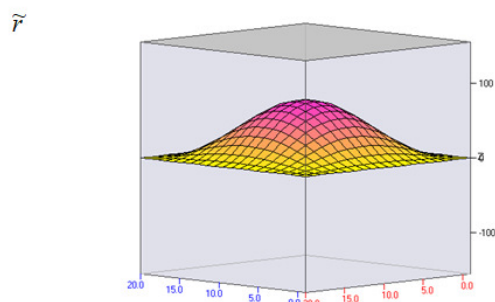


Рис. 6 Форма колебаний перемещения $\tilde{r}$ в координатах x_1, x_2 и z .

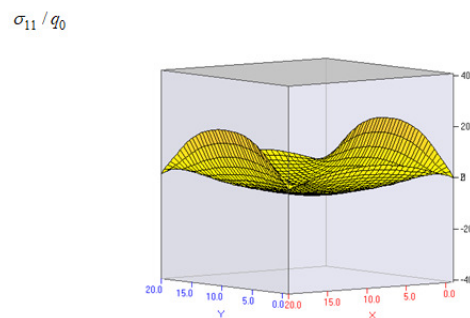


Рис. 7 Форма колебаний напряжения σ_{11}/q_0 в координатах x_1, x_2 и z .

В выполненных численных расчётах нормальные напряжения определялись для фиксированного значения внешней силы q_0 . Кроме того, в расчётной схеме учитывалось изменение нормальных напряжений при переходе от одной формы колебаний к другой в порядке убывания частоты внешнего воздействия.

Таблица 1 Максимальные значения перемещений $\tilde{r}$ и напряжения σ_{11}/q_0 в середине пластины в двух вариантах ($k_{33} = 0, k_{33} \neq 0$) при первом значении частоты внешнего воздействия.

ω_0 , (в рад/сек)	$k_3 = 0$		$k_3 = 0,005$		$k_3 = 0,01$	
	$\frac{E \tilde{r}}{H q_0}$	σ_{11}/q_0	$\frac{E \tilde{r}}{H q_0}$	σ_{11}/q_0	$\frac{E \tilde{r}}{H q_0}$	σ_{11}/q_0
28	750,03	60,156	275,01	25,056	150,07	12,856
32	950,05	90,156	295,05	26,056	165,07	16,256
36	1400,08	120,856	350,02	32,056	185,07	16,456

Увеличение коэффициента постели упругого основания приводит к росту общей жесткости системы «пластина–основание», вследствие чего максимальные перемещения и нормальные напряжения уменьшаются в 3–4 раза. Это свидетельствует о существенном демпфирующем и стабилизирующем влиянии упругого основания.

5 Заключение

Решена задача поперечного колебания прямоугольной пластины, со всеми закрепленными сторонами под действием нормальных нагрузок на основе бимоментной теории. Рассмотрены два расчетных варианта: пластина, расположенная на упругом основании с различными значениями коэффициента постели, и пластина без упругого основания.

Проведённый численный анализ показал, что учет упругого основания оказывает существенное влияние на динамическое поведение пластины. Установлено, что с увеличением коэффициента постели упругого основания наблюдается значительное снижение максимальных перемещений и нормальных напряжений в пластине. В частности, по сравнению с вариантом без упругого основания, значения перемещений и напряжений уменьшаются в несколько раз, что свидетельствует о повышении жесткости системы «пластина–основание».

Полученные результаты подтверждают адекватность и эффективность разработанной численной модели, основанной на бимоментной теории, для оценки напряженно-деформированного состояния и динамических характеристик пластины, взаимодей-

ствующих с упругим основанием. Разработанный подход может быть использован при расчете и анализе сейсмостойкости и динамической надежности пластинчатых конструкций инженерных сооружений.

Литература

- [1] *Нестеров С. В.* Высокоточное аналитическое решение задачи об изгибных колебаниях защемленной квадратной пластины // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, 2016. Т. 11. № 6. С. 67-74.
- [2] *Shitikova M., Krusser A.*, Force driven vibrations of nonlinear plates on a viscoelastic Winkler foundation under the harmonic moving load // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2021. V. 17. № 4. P. 161–180. doi: <http://dx.doi.org/10.22337/2587-9618-2021-17-4-161-180>.
- [3] *Володин С. С.* Определение максимального прогиба прямоугольных пластинок // Молодой учёный., 2016. Т. 80. № 7. С. 100-103.
- [4] *Morozov N. F., Tovstik P. E.*, On modes of buckling for a plate on an elastic foundation. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2010. № 45. P. 519–528. doi: <http://dx.doi.org/10.3103/S0025654410040035>.
- [5] *Моргачев К. С.*, Динамика пластин (модель Тимошенко) постоянной и переменной толщины / Пер. с англ. — Дисс. канд. техн. наук— Самара, 2007. 113 с. (*Morgachev K. S.*, Dynamics of plates (Timoshenko model) of constant and variable thickness. — Diss. PhD. of Technical Sciences – Samara, 2007. 113 p.)
- [6] *Мирзакабилов Х. Н.* Методы расчета колебаний вязкоупругой многослойной (трехслойной) пластины // Universum: технические науки, 2024. Vol. 7,. URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/18008>.
- [7] *Усаров М. К.* К решению трехмерных задач теории упругости для толстых пластин переменной толщины // Проблемы механики, 2017. № 2-3. С. 174-177.
- [8] *Усаров М. К.* Бимоментная теория толстых анизотропных пластин / Пер. с англ. — Монография – Ташкент: изд-во «Fan ziyosi», 2022. 246 с. (*Usarov M. K.* Bimoment theory of thick anisotropic plates. — Monograph – Tashkent: publishing house “Fan ziyosi”, 2022. 246 p.)
- [9] *Усаров М. К., Усаров Д. М.* Динамический изгиб ортотропных пластин на упругом основании с учетом бимоментов // Научный вестник СамГУ, 2018. № 3. С. 29-35.
- [10] *Mirsaidov M., Usarov M.* Bimoment theory construction to assess the stress state of thick orthotropic plates // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 2020. № 53(1). 012090. doi: <http://dx.doi.org/10.1088/1755-1215/614/1/012090>.
- [11] *Usarov M. K.* Buckling of orthotropic plates with bimoments // Magazine of Civil Engineering, 2015. Т. 53. № 1. P. 80-90. doi: <http://dx.doi.org/10.5862/MCE.53.8>.
- [12] *Usarov M., Askarkhodjaev Sh., Usanov F.* Seismic vibrations of multi-storey buildings within the framework of the plate model // International Conference “Advanced Mechanics: Structure, Materials, Tribology”, 2025, AIP Conf. Proc. 3177, 050019-1–050019-9.
- [13] *Usarov M., Usarov D.*, Calculation of compelled fluctuations of panel buildings // E3S Web of Conferences, 2023, Vol. 365, № 02002, doi: <http://dx.doi.org/10.1051/e3sconf/202336502002>.
- [14] *Usarov M., Askarkhodjaev Sh., Usanov F.* Calculation of natural frequencies of multi-story buildings under transverse vibrations within the framework of a continuum plate model // International Conference: “Ensuring Seismic Safety and Seismic Stability of Buildings and Structures, Applied Problems of Mechanics”, 2025, AIP Conf. Proc. 3265, 030011-1–030011-11.

- [15] *Usarov M., Usanov F.* On solution of the problem of bending and vibrations of thick plates on the basis of the bimoment theory // International Conference on Actual Problems of Applied Mechanics, AIP Conference Proceedings 2637, edited by F. Tangreti (AIP Publishing, Samarkand, 2022), 0118598.

UDC 539.3

TRANSVERSE OSCILLATIONS BASED ON BIMOMENT THEORY RECTANGULAR PLATE ON AN ELASTIC BASE*

Usarov M. K., Askarkhodjaev Sh. I., Usanov F. A.

umakhamatali@mail.ru; shuhrat1608@gmail.com; usanovfurqat94@mail.ru

Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T. Urazbaev,
Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

This article examines the dynamic problem of transverse vibrations of a rectangular plate on an elastic foundation, with all sides fixed, under normal loads applied along its face, based on bimoment plate theory. Using the finite difference method, a technique for dynamically calculating the stresses and displacements of a plate on an elastic foundation is developed. Numerical results are presented and compared with those obtained for plates without an elastic foundation.

Keywords: Plate, elastic base, normal load, displacements, stresses, moments, bimoments, equations of motion, boundary conditions, finite difference method.

Citation: Usarov M. K., Askarkhodjaev Sh. I., Usanov F. A. 2026. Transverse oscillations based on bimoment theory rectangular plate on an elastic base. *Problems of mechanics*. 2(36):47-59.

*The work was carried out within the framework of the budget topic of fundamental research.