Uzbek Journal “Problems of Mechanics”

научная статья

DOI: 10.68846/pmjournal-2026-37-00009

Сравнительный анализ конечно-разностного метода конечных элементов при моделировании теплопроводности

Ф.Х. Назаров [1], **Д.А. Амирова**[1*]

[1] Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т. Уразбаева Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, 100125, Узбекистан

[*] **Автор для корреспонденции:** dilnozamirova@gmail.ru

Поступила: 30 июня 2026 | **Доработана:** 15 августа 2026 | **Принята:** 05 сентября 2026 | **Опубликована:** 30 сентября 2026

АННОТАЦИЯ

В данной работе рассматриваются уравнения распространения тепла, описывающие процессы теплопередачи в твердых телах, жидкостях и газах. Исследуются физическая сущность теплопроводности, основные закономерности распространения тепла и их математическое описание. Особое внимание уделяется выводу уравнения теплопроводности, постановке начальных и граничных условий, а также методам решения соответствующих задач. Рассматриваются практические применения уравнений распространения тепла в физике, технике и инженерных расчетах. Полученные результаты могут быть использованы для моделирования тепловых процессов и анализа распределения температуры в различных средах.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

теплопроводность,конечно-разностные методы, метод конечных элементов, численное моделирование, температурное поле.

Comparative Analysis of the Finite-Difference Method of Finite Elements in Heat Conduction Modeling

Farrukh Kh.Nazarov [1], **Dilnoza A.Amirova** [1*]

[1] M.T. Urazbaev Institute of Mechanics and Seismic Resistance of Structures, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, 100125, Uzbekistan

[*] **Corresponding author:** dilnozamirova@gmail.ru

ABSTRACT

In this paper, heat transfer equations describing heat propagation processes in solids, liquids, and gases are considered. The physical nature of heat conduction, the fundamental laws governing heat transfer, and their mathematical description are investigated. Particular attention is paid to the derivation of the heat conduction equation, the formulation of initial and boundary conditions, and the methods for solving the corresponding problems. Practical applications of heat transfer equations in physics, engineering, and technical calculations are also discussed. The obtained results can be used for the modeling of thermal processes and the analysis of temperature distribution in various media.

KEYWORDS

heat conduction, finite difference methods, finite element method, numerical modeling, temperature field.

УДК 532

1. Введение

В настоящее время изучение процессов теплообмена имеет первостепенное значение для современной физики, математики и инженерных наук. Математическое моделирование тепловых процессов служит фундаментом для описания и прогнозирования динамики температурных полей, происходящих в различных технических устройствах, промышленных установках и сложных энергетических системах. Уравнение теплопроводности, описывающее эволюцию температуры во времени и пространстве, выступает критически важным инструментом в таких отраслях, как строительство при оценке энергоэффективности зданий, машиностроение при анализе тепловых нагрузок в механизмах, а также в авиационной и металлургической промышленности. Точное прогнозирование температурных градиентов позволяет не только оптимизировать инженерные решения, но и предотвращать критические поломки, обеспечивая надежность и долговечность сложных систем.[1]

2. Методы

Решение уравнения теплопроводности для задач со сложной геометрией и переменными граничными условиями требует перехода от аналитических методов к современным численным алгоритмам, среди которых особое место занимают конечно-разностные методы

и метод конечных элементов. Конечно-разностные методы, включая эффективный метод переменных направлений Писамена-Рэчфорда и различные полунеявные схемы, исторически зарекомендовали себя как надежный инструмент для решения задач на регулярных сетках благодаря своей алгоритмической простоте и высокой вычислительной эффективности. Эти методы позволяют свести многомерные задачи к серии одномерных уравнений, что существенно сокращает затраты вычислительных ресурсов. Тем не менее, классические разностные подходы часто сталкиваются с трудностями при описании криволинейных границ областей, что может приводить к снижению порядка аппроксимации.[2–4]

В качестве альтернативы выступает метод конечных элементов, который базируется на вариационной постановке задачи и использовании нерегулярных сеток, что обеспечивает высокую гибкость при моделировании сложных геометрических форм. Реализация данного метода в среде FreeFEM++ позволяет эффективно использовать локальное сгущение сетки в зонах с резкими градиентами температуры, обеспечивая высокую точность решения даже для сред с переменными физическими свойствами. Несмотря на более высокие требования к вычислительной мощности по сравнению с разностными схемами, метод конечных элементов является незаменимым инструментом для глубокого анализа нестационарных процессов в неоднородных средах.[5–7].

3. Математический и физический постановка задачи

Целью настоящей работы является комплексное сопоставление точности, устойчивости и вычислительной эффективности вышеуказанных методов при решении уравнения нестационарной теплопроводности. Исследование включает анализ сходимости алгоритмов Писамена-Рэкфорда и полунеявных схем в сравнении с результатами, полученными методом конечных элементов в среде FreeFEM++. Проведенный сравнительный анализ позволяет выявить наиболее оптимальные численные стратегии в зависимости от специфики решаемой инженерной задачи, а также обосновать выбор алгоритма для обеспечения достоверности численного моделирования тепловых процессов.

3.1. Математическая постановка задачи

Для верификации теоретических положений и оценки эффективности выбранных численных методов в данной работе рассматривается задача нестационарной теплопроводности для однородного тела. Объектом исследования является медная пластина размерами L=H=0.5м, где процесс теплопереноса описывается соответствующим дифференциальным уравнением в частных производных:[8]

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \qquad 0 < x < L,\ 0 < y < H \tag{1}$$

Для корректного численного моделирования системы были определены начальные и граничные условия, представленные на схеме области решения (рис. 1).

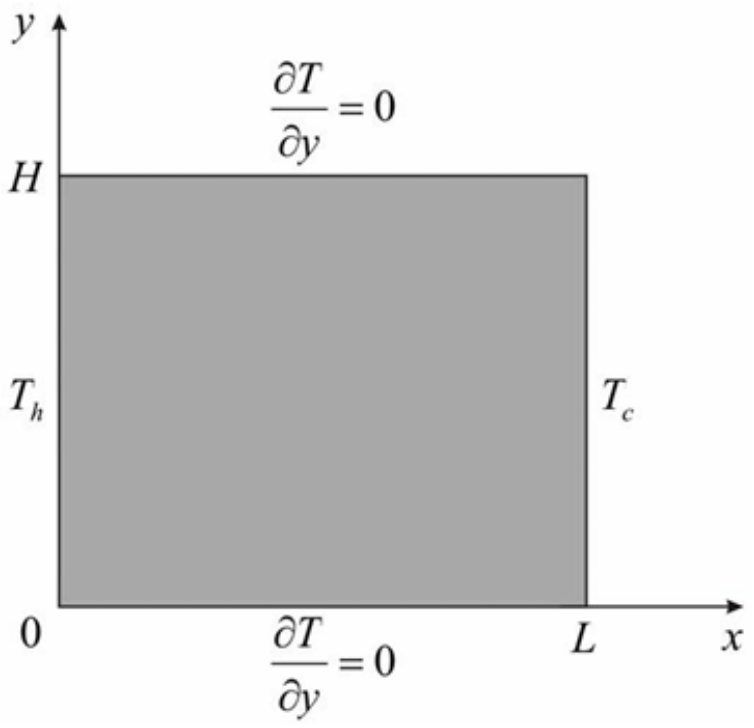


Рисунок 1. Область решения.

Для аппроксимации дифференциального уравнения (1) разностным методом введём пространственно-временную сетку с координатами:

$$x_i = (i - 1) \cdot h_x,\ y_j = (j - 1) \cdot h_y, t_n = n \cdot \tau$$

где

$$i = \overline{1, N_x};\ j = \overline{1, N_y}, n = \overline{0, K}$$

То есть вся расчётная область (рис. 1) покрывается сеткой (рис. 2)

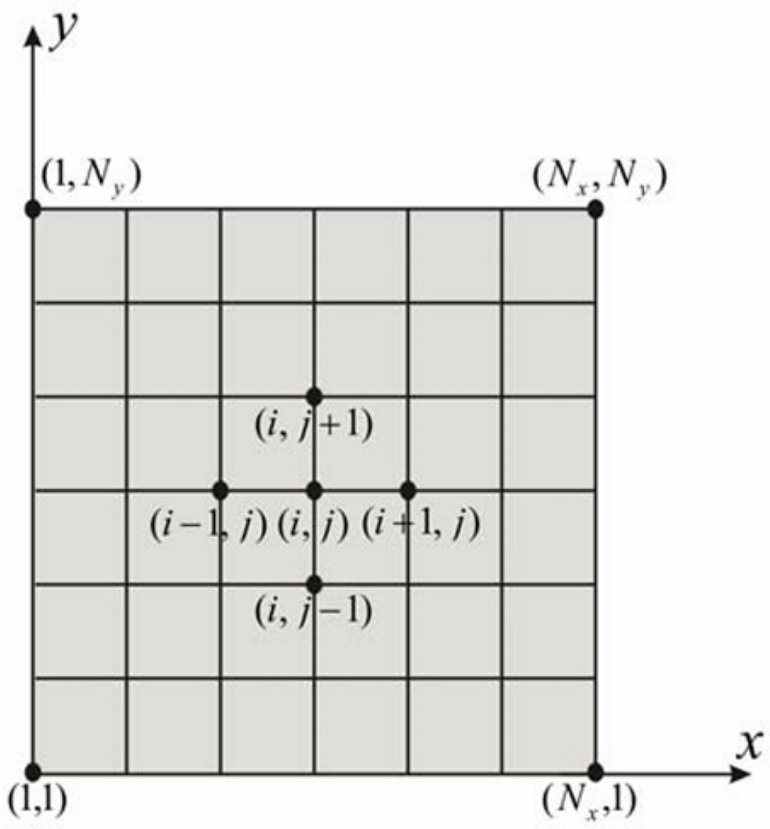


Рисунок 2. Разностная сетка области решения.

Начальное распределение температуры во всей области принимается равным $T_0 = 5^{\circ}\mathrm{C}$ при $t = 0$. Граничные условия задачи включают поддержание постоянной температуры $T_h = 80^{\circ}\mathrm{C}$ при $\chi = 0$ и постоянной температуры $T_c = 30^{\circ}\mathrm{C}$ при $\chi = L$ для всех $t > 0$. Плотность $\rho = 8960$кг/м³; Теплопроводность $\lambda = 400$ Вт/(м·К); Удельная теплоёмкость $c = 385$Дж/(кг·°С).Начальные и граничные условия запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} t = 0:\ T = T_0, & 0 \le x \le L,\ 0 \le y \le H, \\ x = 0:\ T = T_h, & t > 0, \\ x = L:\ T = T_c, & t > 0, \\ y = 0:\ \dfrac{\partial T}{\partial y} = 0, & t > 0, \\ y = H:\ \dfrac{\partial T}{\partial y} = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Данная математическая модель служит базовой конфигурацией для последующей дискретизации области с использованием пространственно-временной сетки и применения рассматриваемых численных алгоритмов.

Для решения нестационарной задачи теплопроводности (1), (2) в настоящей работе применены три подхода: метод конечных элементов, реализованный в пакете FreeFem++, локально-одномерная разностная схема (схема расщепления типа Писмена–Рэчфорда) и полунеявная разностная схема. Ниже приводится их последовательное построение.

4. Метод решения

Для решения нестационарной задачи теплопроводности (1), (2) в настоящей работе применены три подхода: метод конечных элементов, реализованный в пакете FreeFem++, локально-одномерная разностная схема (схема расщепления типа Писмена–Рэчфорда) и полунеявная разностная схема. Ниже приводится их последовательное построение.

4.1. Метод конечных элементов: слабая формулировка задачи

Получим слабую формулировку задачи (1), (2). Запишем уравнение (1) на (n+1)-n временном слое, используя полностью неявную схему по времени:

$$\rho c \frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^{n+1}}{\partial y^2} \right) \tag{3}$$

Умножая полученное уравнение на пробную функцию $v(x,y)$ и интегрируя по области D, получаем:

$$\iint_D \rho c \frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} v \, dx \, dy = \lambda \iint_D \Delta T^{n+1} v \, dx \, dy, \qquad \forall v \tag{4}$$

Применяя к слагаемому со вторыми производными формулу Грина, понижаем порядок дифференцирования:

$$\iint_D \Delta T^{n+1} v \, dx \, dy = - \iint_D \nabla T^{n+1} \cdot \nabla v \, dx \, dy + \int_{\partial D} v \frac{\partial T^{n+1}}{\partial n} \, ds \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), приходим к соотношению, содержащему граничный интеграл:

$$\iint_D \frac{\rho c}{\tau} (T^{n+1} - T^n) v \, dx \, dy + \lambda \iint_D \nabla T^{n+1} \cdot \nabla v \, dx \, dy - \lambda \int_{\partial D} v \frac{\partial T^{n+1}}{\partial n} \, ds = 0, \qquad \forall v \tag{6}$$

Для удовлетворения краевому условию на границе $\Gamma_D (x=0, x=L)$ потребуем выполнения однородного условия для пробной функции Вводя обозначение $\mu = \frac{\lambda}{\rho c}$ и умножая уравнение на $\frac{\tau}{\rho c}$, получаем окончательную слабую формулировку задачи:

$$\iint_D \left(T^{n+1} v - \mu \tau \nabla T^{n+1} \cdot \nabla v \right) dx \, dy = \iint_D T^n v \, dx \, dy, \qquad \forall v : \; v|_{\partial D} = 0 \tag{7}$$

с краевым условием

$$T^{n+1}\big|_{x=0} = T_h, \qquad T^{n+1}\big|_{x=L} = T_c \tag{8}$$

Соотношение (7), (8) представляет собой обычную стационарную (эллиптическую) задачу для каждого временного слоя $n+1$, которая решается в среде FreeFem++ стандартными средствами метода конечных элементов на основе вариационной (слабой) постановки. Организуя последовательное решение таких задач для $n = 0,1,2,...$, получаем эволюцию температурного поля $T(x,y,t)$ во времени. Существенно, что естественное (неймановское) условие на адиабатических границах не задаётся явно, а следует непосредственно из структуры слабой формулировки (7), тогда как условие Дирихле на границах $x=0$ и $x=L$ вводится как существенное (главное) краевое условие.

4.2. Локально-одномерная схема (метод переменных направлений Писмена–Рэчфорда)

В основе данного подхода лежит идея расщепления двумерного оператора теплопроводности по пространственным направлениям: на каждом временном шаге τ переход от слоя n к слою $n+1$ осуществляется в два полушага. На первом полушаге уравнение (1) аппроксимируется неявно только по направлению x, а на втором — неявно по направлению y:

$$\rho c \frac{T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^{n}}{\tau} = \lambda \left(\frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} \right), \tag{9}$$

$$\rho c \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \lambda \left(\frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} \right), \tag{10}$$

Каждое из уравнений (9) и (10) приводится к стандартному трёхдиагональному виду и решается методом прогонки (методом трёхточечной факторизации). Схема (9), (10) обладает свойством суммарной аппроксимации и является абсолютно устойчивой (схема А.А. Самарского). Формальное обоснование устойчивости (например, методом гармоник

фон Неймана) в настоящей работе не приводится — устойчивость иллюстрируется только

результатами расчётов, что является методическим ограничением работы.

4.3. Полунеявная разностная схема

В отличие от схемы расщепления, в полунеявной схеме оба пространственных направления аппроксимируются в пределах одного временного шага, однако с разной степенью неявности: вторая производная по x берётся на предыдущем (явном) слое n, а по y — на новом (неявном) слое $n+1$:

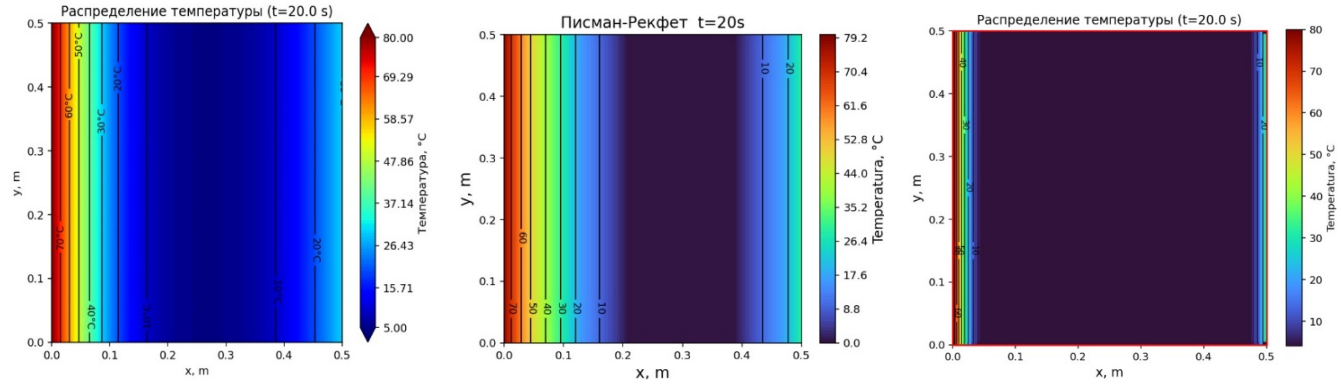
$$\rho c \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{\tau} = \lambda \left(\frac{T_{i+1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} \right) \tag{11}$$

Приведение уравнения (11) к каноническому трёхдиагональному виду относительно неизвестных на слое n+1 позволяет решить его методом прогонки только по направлению y, поскольку слагаемые по x являются известными (взятыми со слоя n)

5. Результаты расчетов и их обсуждение

Анализ результатов численного моделирования. После описания математических моделей и численных алгоритмов был проведен сравнительный анализ полученных температурных полей в медной пластине. Вычисления проводились с одинаковым шагом по времени $t = 0.01$с и пространственным шагом, соответствующим сетке 100×100 для конечно-разностных методов и аналогичной плотности разбиения для метода конечных элементов.Ниже, на рис. 3–5, представлены изотермы ($^{\circ}C$) в пластине в моменты времени $t = 20, 40$ и 60с. Сопоставление ограничено визуальным (качественным) сравнением формы и расположения изотерм; количественные показатели точности (нормы отклонения, например L2 или C) и вычислительной эффективности (время счёта, число итераций) в

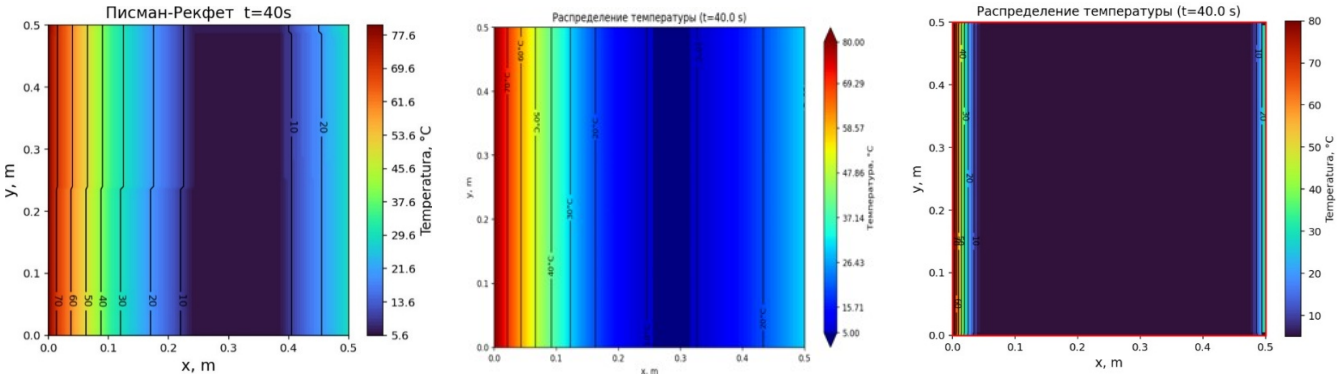
работе не приводятся, хотя они заявлены как цель исследования во введении — это следует восполнить в доработанной версии статьи.



A **B** **C**

Рисунок 3. Изотермы (°C) в пластине при $t = 20$ с: A — FreeFEM++; B — метод Писмена–Рэчфорда; C — полунеявный метод.

На момент времени $t = 20c$ тепло распространяется преимущественно вблизи нагреваемой границы пластины. Во всех рассмотренных методах наблюдается плавное уменьшение температуры по направлению от левой границы к правой. Результаты метода Писмена–Рэчфорда хорошо согласуются с расчетами FreeFem++, тогда как полунеявный метод демонстрирует более резкое изменение температуры. Это свидетельствует о корректности работы всех методов и высокой точности метода Писмена–Рачфорда на начальном этапе процесса теплопереноса.



A **B** **C**

Рисунок 4. Изотермы (°C) в пластине при $t = 40$ с: A — FreeFEM++; B — метод Писмена–Рэчфорда; C — полунеявный метод.

При $t = 40c$ тепло проникает глубже во внутренние области пластины, что приводит к выравниванию температурного поля. Распределения температуры, полученные методом Писмена–Рэчфорда и в среде FreeFem++, сохраняют хорошее соответствие как по форме изотерм, так и по значениям температуры. Полунеявный метод остается устойчивым, однако отличается менее выраженным распространением тепла внутри области. Полученные результаты подтверждают эффективность метода Писмена–Рэчфорда для моделирования нестационарной теплопроводности.

На момент времени $t = 60c$ процесс теплопередачи охватывает практически всю пластину, а температурное поле становится более равномерным. Результаты FreeFem++ и метода Писмена–Рэчфорда демонстрируют близкое совпадение, что подтверждает достоверность численного решения. Полунеявный метод также обеспечивает устойчивое моделирование процесса, однако различия в распределении температуры остаются заметными. В целом проведенное сравнение показывает, что метод Писмена–Рачфорда наиболее точно воспроизводит результаты, полученные с помощью FreeFem++, на всех рассмотренных временных этапах.

6. Вывод

На рисунках представлены результаты численного моделирования распределения температуры в пластине в моменты времени $t = 20c, 40c,$ и $60c$, полученные с использованием пакета FreeFem++, метода Писмена–Рэчфорда и полунеявного метода. Анализ изотерм показывает, что во всех случаях процесс теплопереноса развивается закономерно: с увеличением времени тепло распространяется от нагреваемой границы вглубь пластины, а температурное поле становится более равномерным. При $t = 20c$ наблюдается начальная стадия распространения тепла, при $t = 40c$ зона прогрева значительно увеличивается, а к $t = 60c$ тепловое воздействие охватывает практически всю расчетную область. Сравнение результатов показывает, что метод Писмена–Рэчфорда обеспечивает распределение температуры, наиболее близкое к решению, полученному в FreeFem++. Форма изотерм и характер изменения температуры в обоих случаях хорошо согласуются на всех рассматриваемых временных этапах. Полунеявный метод также демонстрирует

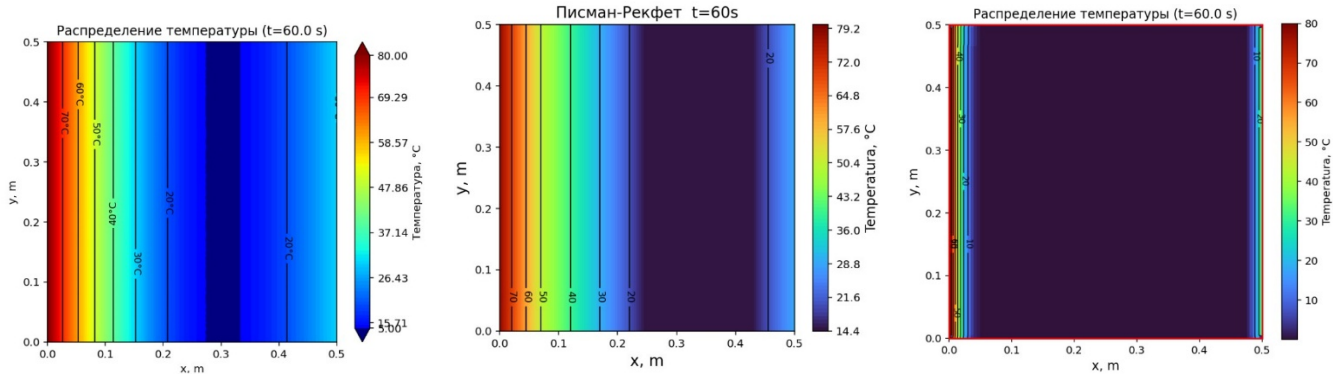


Рисунок 5. Изотермы (°C) в пластине при $t = 60$ с: A — FreeFEM++; B — метод Писмена–Рэчфорда; C — полунеявный метод.

устойчивость вычислительного процесса, однако полученные температурные поля заметно отличаются от результатов FreeFem++, что проявляется в более резком изменении температуры и меньшей глубине распространения тепла. Таким образом, проведённое исследование подтверждает корректность разработанных численных алгоритмов и показывает, что метод Писмена–Рэчфорда обладает более высокой точностью по сравнению с полунеявным методом на качественном уровне. Для полноценного количественного подтверждения этого вывода в дальнейшей работе необходимо привести таблицы норм ошибок, оценку вычислительного времени каждого метода и формальный анализ устойчивости.

Декларации / Declarations

Вклад авторов: Назаров Ф.Х.: концептуализация, разработка методологии, программное обеспечение, написание первоначального варианта рукописи. Амирова Д.А.: валидация, визуализация, рецензирование и редактирование рукописи. Оба автора прочитали и одобрили окончательную версию рукописи.

Author Contributions: F.Kh. Nazarov: conceptualization, methodology, software, writing—original draft. D.A. Amirova: validation, visualization, writing—review and editing. Both authors read and approved the final manuscript.

Финансирование: Данное исследование не получало специального финансирования от каких-либо государственных, коммерческих или некоммерческих организаций.

Funding: This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Одобрение этического комитета: Не применимо, поскольку данное исследование является математическим и численным и не предусматривает участия людей или животных.

Ethics Approval: Not applicable, as this is a mathematical and numerical study involving no human or animal subjects.

Информированное согласие и согласие на публикацию: Не применимо.

Informed Consent and Consent for Publication: Not applicable.

Доступность данных: Численный код (решатель на основе метода конечных объёмов/спектральной редукции), а также данные, лежащие в основе всех рисунков и таблиц, включая результаты тестов сходимости и данные о прорыве, доступны у автора, ответственного за переписку, по обоснованному запросу.

Data Availability Statement: The numerical code (finite-volume/spectral-reduction solver) and the data underlying all figures and tables, including the convergence-test and breakthrough data, are available from the corresponding author on reasonable request.

Благодарности: Дополнительные благодарности в представленной рукописи не указаны.

Acknowledgments: No additional acknowledgments were specified in the submitted manuscript.

Конфликт интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

Сведения об использовании искусственного интеллекта: Инструменты вычислительной поддержки и языкового редактирования использовались для прототипирования программного кода и редактирования рукописи. Все модели, результаты и выводы были проверены авторами, которые несут полную ответственность за содержание работы.

Artificial Intelligence Disclosure: Computational-assistance and language-editing tools were used for code prototyping and manuscript editing; all models, results, and conclusions were verified by the authors, who take full responsibility for the content.

Обозначения и сокращения

Сокращения / Abbreviations

T	температура / temperature
t	время / time
x, y	пространственные координаты / spatial coordinates
L, H	размеры пластины / dimensions of the plate
T_0	начальная температура / initial temperature
T_h, T_c	температуры нагретой и холодной границ / hot- and cold-boundary temperatures
ρ	плотность материала / material density
c	удельная теплоёмкость / specific heat capacity
λ	коэффициент теплопроводности / thermal conductivity
h_x, h_y	шаги пространственной сетки / spatial grid steps
τ	шаг интегрирования по времени / time step
FDM / КРМ	конечно-разностный метод / finite difference method
FEM / МКЭ	метод конечных элементов / finite element method
PR	метод Писмена–Рэчфорда / Peaceman–Rachford method
FreeFEM++	программная среда расчётов методом конечных элементов / finite-element software environment

Список литературы

[1] Fletcher K. Vychislitel'nye metody v dinamike zhidkostey [Computational methods in fluid dynamics]. vol. 1–2. Mir; 1991. (In Russian).

[2] Malikov Z, Nazarov F, Khaydarov S. Numerical study of subsonic hot and near-sonic submerged jets based on a two-fluid model. J Appl Comput Mech. 2025;11(4):871–886.

[3] Nazarov FK, et al. Calculation of axisymmetric transonic jet with various turbulence models using COMSOL Multiphysics package. AIP Conf Proc. 2025;3256(1):040040.

[4] Malikov Z, Nazarov F. Numerical study of flow on a flat plate with zero pressure gradient based on a two-fluid model. AIP Conf Proc. 2025;3265(1):060003.

[5] Nazarov F, et al. Numerical calculation of turbulent flow in a two-dimensional flat diffuser based on the COMSOL Multiphysics software. In: Proceedings of the 7th International Conference on Future Networks and Distributed Systems; 2023:372–376.

[6] Parneix S, Durbin PA, Behnia M. Computation of 3-D turbulent boundary layers using the V2F model. Flow Turbul Combust. 1998;60(1):19–46.

[7] Mazumder MHM. Comparative study of turbulence models in CFD for transonic flow over the ONERA M6 wing. Discov Mech Eng. 2024;3:46. https://doi.org/10.1007/s44245-024-00080-5.

[8] Kuznetsov GV, Sheremet MA. Raznostnye metody resheniya zadach teploprovodnosti [Finite-difference methods for solving heat conduction problems]. Tomsk Polytechnic University; 2007. (In Russian).

[9] Samarskii AA, Vabishchevich PN. Vychislitel'naya teploperedacha [Computational heat transfer]. Editorial URSS; 2003. (In Russian).

[10] Mayeur J, Dumont A, Destarac D, Gleize V. RANS simulations on TMR test cases and M6 wing with the Onera elsA flow solver. In: 54th AIAA Aerospace Sciences Meeting; 2016. January 4–8, 2016. https://doi.org/10.2514/6.2015-1745.

[11] Zhukov MY, Shiryaeva EV. Ispol'zovanie paketa konechnykh elementov FreeFem++ dlya zadach gidrodinamiki, elektroforeza i biologii [Use of the FreeFem++ finite element package for problems of hydrodynamics, electrophoresis, and biology]. Southern Federal University; 2008. (In Russian).

[12] NASA Langley Research Center. 3D ONERA M6 Wing Validation Case. NASA Langley Research Center; 2026. Accessed October 6, 2026. Turbulence Modeling Resource. Available from: https://turbmodels.larc.nasa.gov/onerawingnumerics_val.html.

Отказ от ответственности / Примечание издателя

Утверждения, мнения и данные во всех публикациях принадлежат исключительно отдельным авторам и участникам и не обязательно отражают взгляды издателя, журнала или редакторов. Издатель, журнал и редакторы не несут ответственности за вред людям или ущерб имуществу, возникшие вследствие использования идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в тексте. **Disclaimer of Liability/Publisher's Note**

The statements, opinions, and data contained in all publications are solely those of the individual author(s) and contributor(s) and do not necessarily reflect the views of the Publisher, the Journal, or the editors. The Publisher, the Journal, and the editors disclaim responsibility for any injury to persons or damage to property resulting from any ideas, methods, instructions, or products referred to in the content.