Uzbek Journal “Problems of Mechanics”

научная статья

DOI: 10.68846/pmjournal-2026-37-00006

Напряжённо-деформированное состояние стержня квадратного сечения при сложном нагружении

Жавлонбек Турдибеков[1*]

[1] Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т. Уразбаева Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, 100125, Узбекистан

[*] **Автор для корреспонденции:** javlonbekturdibekov9@gmail.com

Поступила: 24 июня 2026 | **Доработана:** 15 августа 2026 | **Принята:** 05 сентября 2026 | **Опубликована:** 30 сентября 2026

АННОТАЦИЯ

Актуальность: В работе исследовано упругопластическое растяжение и кручение однородного стержня квадратного сечения при последовательных и пропорциональном способах нагружения. **Методы:** Расчёт основан на нахождении функции депланации. Решение по модели Прандтля–Рейсса сопоставлено с расчётами по теории средней кривизны, учитывающей память траектории деформирования. Для решения задачи использован метод конечных разностей с пятиточечной разностной схемой. **Результаты:** На трёх сетках подтверждён второй порядок сходимости для тестовой упругой задачи. В представленном сопоставлении при одинаковом конечном кинематическом состоянии значение момента, полученное по теории средней кривизны превышает результат, полученный по модели Прандтля–Рейсса на величину до 9.44%. **Выводы:** Локальные траектории показывают чувствительность пластической деформации к виду нагружения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

сложное нагружение, квадратное сечение, депланация, упругопластичность, средняя кривизна, конечные разности, SOR.

Stress and strain state of a square bar under complex loading

Javlonbek Turdibekov[1*]

[1] Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M. T. Urazbaev, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, 100125, Uzbekistan

[*] **Corresponding author:** javlonbekturdibekov9@gmail.com

ABSTRACT

Background: Elastoplastic tension and torsion of a homogeneous square bar are examined for sequential and proportional loading paths. **Methods:** A displacement formulation is used: plastic shear strains contribute to the source in the warping Poisson equation and enter the Neumann boundary conditions. The Prandtl–Reuss model is compared with an average curvature model that accounts for deformation-path memory. A five-point finite-difference scheme and successive over-relaxation are employed. **Results:** Three elastic benchmark meshes exhibit second-order convergence; the torque error on the 181×181 mesh is 0.000941%. In the reported comparison at the same final kinematic state, the average curvature model predicts a torque 3.15–9.44% above the Prandtl–Reuss result. **Conclusions:** Local trajectories reveal sensitivity to the loading sequence. The conclusions are restricted to the adopted reduced cross-sectional description and the elastic verification of the algorithm.

KEYWORDS

complex loading, square cross-section, warping, elastoplasticity, average curvature, finite differences, SOR.

1. Введение

Совместное растяжение и кручение некруглого стержня связывает депланацию сечения с нормальными и касательными напряжениями. Для квадратного сечения формулы круглого вала неприменимы: требуется определять поле продольных перемещений и выполнять условие свободной боковой поверхности [1, 2]. При развитии пластических деформаций это поле зависит от накопленных пластических деформаций и истории нагружения [3, 4]. Эксперименты с цилиндрическими образцами подтверждают чувствительность пластического течения к непропорциональным путям, но непосредственно не описывают депланацию сплошного квадратного сечения [5, 6].

Теория упругопластических процессов Ильюшина и теория средних кривизн связывают свойства материала с геометрией траектории деформаций с учетом эффекта памяти материала к виду предшествующего нагружения [7–11]. Численные решения задач кручения стержней развиваются на основе обобщённого метода конечных разностей, фундаментальных решений, методов конечных элементов и конечных объёмов [12–15]. Исследование многосвязных сечений также показывает необходимость учёта порядка приложения внешних сил [16].

В работе основным моментом является учет влияния сложного нагружения (вида траектории нагружения) на распределение

напряжений и деформаций по сечению материала. Рассмотрены пути нагружения вида $M \to N$, $N \to M$ и пропорциональное нагружение. Сначала проверяется тестовая упругая задача, затем анализируется влияние истории нагружения на распределение пластических деформаций в стержне.

2. Материал и методы

2.1. Кинематика и равновесие сечения

Рассматривается однородный изотропный призматический стержень со сплошным сечением $\Omega = [-a/2, a/2]^2$, $a = 20$ мм. Ось z направлена вдоль стержня; боковая поверхность свободна от нагрузок. Расчёт относится к регулярной области вдали от торцов в условиях малых деформаций и свободной депланации Сен-Венана. Приняты следующие механические характеристики:
$G = 81800$ МПа, $\nu = 0.3$, $E = 212680$ МПа, $\sigma_{y0} = 340$ МПа, материал линейно упрочняющийся с модулем упрочнения $H = 2500$ МПа; основная сетка содержит 181×181 узлов. Геометрия и контрольные точки показаны на рис. 1.

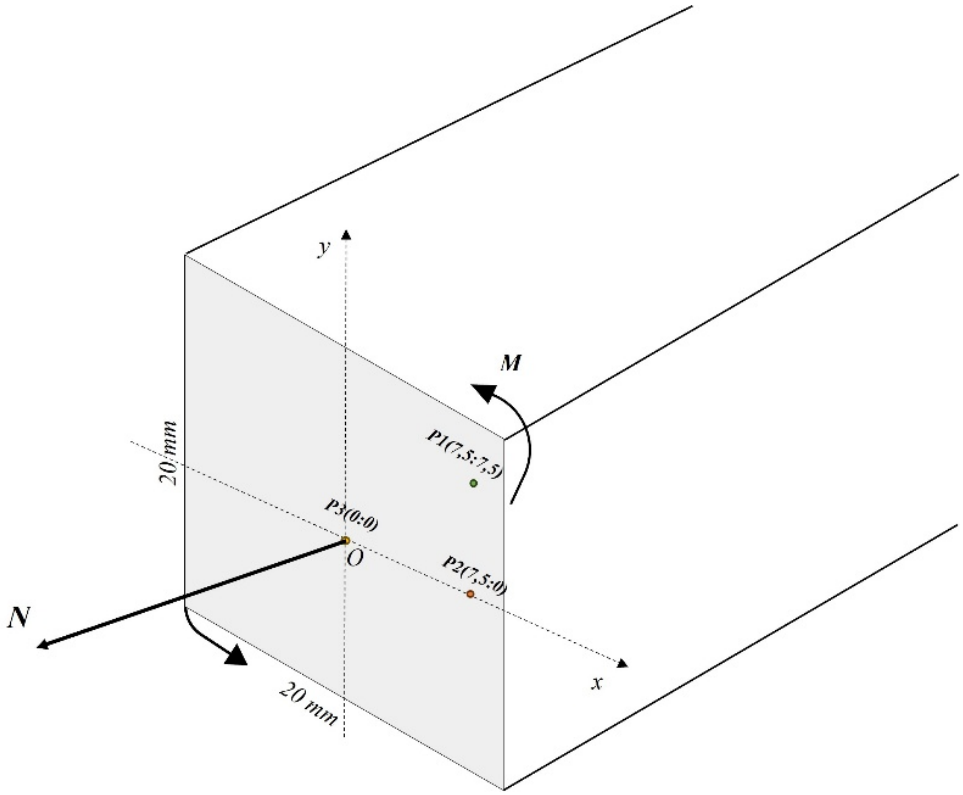


Рисунок 1. Квадратный стержень, силовые факторы N, M и контрольные точки $P_1(7.5, 7.5)$, $P_2(7.5, 0)$, $P_3(0, 0)$; координаты в мм.

При постоянных по z осевой деформации e_0 и интенсивности закручивания θ поле перемещений принимается в виде [1, 2]

$$\begin{aligned} u_x &= v_x(x,y) - \theta z y, \qquad u_y = v_y(x,y) + \theta z x, \\ u_z &= e_0 z + w(x,y). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь w – депланационное перемещение (мм), θ измеряется в mm^{-1}, а v_x, v_y описывают перемещения в плоскости сечения. Полный угол закручивания равен θL. Из кинематики малых деформаций следуют

$$\varepsilon_{zz} = e_0, \qquad 2\varepsilon_{xz} = w_{,x} - \theta y, \qquad 2\varepsilon_{yz} = w_{,y} + \theta x. \tag{2}$$

Поперечные компоненты задаются производными v_x, v_y: $\varepsilon_{xx} = v_{x,x}$, $\varepsilon_{yy} = v_{y,y}$, $2\varepsilon_{xy} = v_{x,y} + v_{y,x}$. При отсутствии объёмных сил двумерное равновесие имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xx,x} + \tau_{xy,y} &= 0, \qquad \tau_{xy,x} + \sigma_{yy,y} = 0, \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Скалярное решение для w обеспечивает последнее уравнение (3). Упрощение $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0$ допустимо лишь при совместности поперечных перемещений, пуассоновского сжатия и неоднородных пластических деформаций; иначе необходим совместный расчёт первых двух уравнений.

2.2. Уравнение для функции депланации и граничные условия

Разложение деформаций на упругую и пластическую части при постоянном G даёт [3, 4]

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= G\left(w_{,x} - \theta y - 2\varepsilon^p_{xz}\right), \\ \tau_{yz} &= G\left(w_{,y} + \theta x - 2\varepsilon^p_{yz}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Компоненты $\varepsilon^p_{xz}, \varepsilon^p_{yz}$ являются пластическими составляющими деформаций. Подстановка (4) в уравнение равновесия при условии $\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y = 0$ приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \nabla^2 w &= 2\left(\varepsilon^p_{xz,x} + \varepsilon^p_{yz,y}\right) \quad \text{в } \Omega, \\ \partial_n w &= \theta\left(yn_x - xn_y\right) + 2\left(\varepsilon^p_{xz}n_x + \varepsilon^p_{yz}n_y\right) \quad \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{5}$$

В упругой области правая часть равна нулю и решается уравнение Лапласа. При пластическом деформировании её определяет дивергенция пластических сдвигов, поэтому возникает уравнение Пуассона с обновляемым источником. Наличие пластичности не требует ненулевой дивергенции в каждом отдельном узле.

$$\begin{aligned} w_{,x} &= \theta y + 2\varepsilon^p_{xz} \quad (x = \pm a/2), \\ w_{,y} &= -\theta x + 2\varepsilon^p_{yz} \quad (y = \pm a/2), \end{aligned} \tag{6}$$

Решение задачи Неймана определяется с точностью до постоянной, которая фиксируется условием $\int_\Omega w\, dA = 0$. Условие совместности следует из теоремы Гаусса; суммарный поток крутильной части по замкнутой границе равен нулю. В углах учитываются обе смежные стороны. При полном расчёте v_x, v_y дополнительно исключаются перенос и жёсткий поворот сечения.

Силовые факторы определяются интегрированием напряжений по поперечному сечению:

$$N = \int_\Omega \sigma_{zz}\, dA, \qquad M = \int_\Omega \left(x\tau_{yz} - y\tau_{xz}\right) dA. \tag{7}$$

2.3. Определяющие соотношения

Для модели Прандтля–Рейсса используются изотропная упругость, пластическая несжимаемость и линейное изотропное упрочнение [3, 4]:

$$\sigma = K\, tr\,(\varepsilon)\,\mathbf{I} + 2G\left(\mathbf{e} - \varepsilon^p\right), \qquad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \qquad \mathbf{e} = dev\varepsilon. \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= dev\sigma, \quad q = \sqrt{\tfrac{3}{2}\mathbf{s}:\mathbf{s}}, \quad f = q - \left(\sigma_{y0} + H\kappa\right) \le 0, \\ d\varepsilon^p &= d\lambda\tfrac{3\mathbf{s}}{2q}, \quad d\kappa = d\lambda, \quad d\lambda \ge 0, \quad f\, d\lambda = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

При активном нагружении выполняется условие $df = 0$; при $H = 0$ имеем случай идеальной пластичности. Интенсивность напряжений представлена как $q = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 3\left(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right)}$. Итерации осуществляются согласно [4]: для пластического пробного состояния $\Delta\lambda = \left(q^{tr} - \sigma_{y0} - H\kappa_n\right)/(3G + H)$; упругость сохраняется при $q^{tr} \le \sigma_{y0} + H\kappa_n$. Ограничения поперечного напряжённого состояния требуют дополнительных условий.

Модель теории средних кривизн учитывает запаздывание векторных свойств материала [7, 8, 10, 11]. Для принятой метрики вводятся

$$d\updownarrow = \sqrt{d\mathbf{e} : d\mathbf{e}}, \qquad \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{e}}{d\updownarrow}, \qquad r = \sqrt{\mathbf{s}:\mathbf{s}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, q. \tag{10}$$

Для компланарной траектории $\chi = d\beta/d\updownarrow$ – знаковая кривизна, α – знаковый угол запаздывания между $\mathbf{s}$ и $\mathbf{t}$, определяемый соотношением $cos\alpha = \frac{\mathbf{s}:t}{r}$. При продольном и поперечном касательных модулях $\mathcal{P}, \mathcal{N}$ (MPa) определяющее соотношение имеет вид

$$d\mathbf{s} = \mathcal{N}\, d\mathbf{e} + \left(\left(\mathcal{P} - \mathcal{N}\right)\right) \frac{\mathbf{s} : d\mathbf{e}}{\mathbf{s} : \mathbf{s}}\, \mathbf{s}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} d\varepsilon^p = &\left(\frac{1}{\mathcal{N}} - \frac{1}{2G}\right) d\mathbf{s} \\ &+ \left(\frac{1}{\mathcal{P}} - \frac{1}{\mathcal{N}}\right) \frac{\mathbf{s} : d\mathbf{s}}{\mathbf{s} : \mathbf{s}}\, \mathbf{s}. \end{aligned} \tag{12}$$

$$\mathcal{N} = \frac{r\left(\chi - d\alpha/d\updownarrow\right)}{\sin\alpha}, \qquad \mathcal{P} = \frac{dr/d\updownarrow}{\cos\alpha}. \tag{13}$$

Экспоненциальная память задаётся параметром $\lambda_\updownarrow$ в той же метрике длины пути [10]:

$$\begin{aligned} \alpha(\updownarrow) &= \int_0^{\updownarrow} \chi(\xi) e^{-c(\updownarrow - \xi)}\, d\xi, \quad c = \frac{2.7725}{\lambda_\updownarrow}, \\ \frac{d\alpha}{d\updownarrow} &= \chi - c\alpha. \end{aligned} \tag{14}$$

$$\alpha_{n+1} = e^{-c\Delta\updownarrow}\alpha_n + \frac{1 - e^{-c\Delta\updownarrow}}{c}\chi_{n+1/2}. \tag{15}$$

Формула (15) точна при постоянной кривизне внутри шага. Переход к метрике $s = \sqrt{2/3}\,\updownarrow$ требует такого же масштабирования длины памяти. В упругой ветви $\mathcal{N} = \mathcal{P} = 2G$; при поворотах и сингулярных значениях α, r применяются локальные итерации и подшаги. Для замыкания теории средней кривизны необходимо задать $r\,(\updownarrow)$, $\lambda_\updownarrow$ и критерии нагружения с контролем диссипации. Радиальный возврат Прандтля–Рейсса не заменяет совместное интегрирование (12), (15).

2.4. Дискретизация и протокол нагружения

На равномерной сетке $x_i = -a/2 + ih$, $y_j = -a/2 + jh$, $h = a/(n-1)$ во внутренних узлах используется пятиточечный шаблон [17]:

$$\begin{array}{ll} \frac{w_{i+1,j}+w_{i-1,j}+w_{i,j+1}+w_{i,j-1}-4w_{ij}}{h^2} & = f_{ij}^{w}, \\ f_{ij}^{w} & = 2\left(D_x\varepsilon_{xz}^{p}+D_y\varepsilon_{yz}^{p}\right)_{ij}. \end{array} \tag{16}$$

Значения приращения пластических деформаций обновляются на внешних нелинейных итерациях; сходимость SOR (Successive Over-Relaxation) при фиксированном источнике ещё не означает сходимости упругопластической задачи [18]. Для $g_x = \theta y + 2\varepsilon_{xz}^{p}$, $g_y = -\theta x + 2\varepsilon_{yz}^{p}$ центральные граничные производные реализуются исключением вспомогательных узлов:

$$\begin{array}{llll} w_{-1,j} & = w_{1,j} - 2hg_{x,0j}, & w_{n,j} & = w_{n-2,j} + 2hg_{x,n-1,j}, \\ w_{i,-1} & = w_{i,1} - 2hg_{y,i0}, & w_{i,n} & = w_{i,n-2} + 2hg_{y,i,n-1}. \end{array} \tag{17}$$

В углах исключаются оба внешних узла. После каждого прохода SOR из w вычитается среднее с весами трапеций; отдельно проверяется баланс дискретного источника и нормального потока. Для приведённых расчётов принят коэффициент релаксации $\rho = 1.78$.

Расчётный шаг включает: задание приращения управления; решение задачи (5), (6) с текущим источником; локальное обновление состояния Прандтля–Рейсса либо по теории средней кривизны; повторение до согласования источника, напряжений и равновесия; вычисление N, M по (7). При силовом управлении дополнительно уточняются e_0, θ. Контроль включает невязки краевой задачи, совместности Неймана, интегрального равновесия и локального обновления.

Рассматриваются три протокола: MN – сначала увеличивается M, затем при постоянном M увеличивается N; NM – обратная последовательность; пропорциональный путь – одновременное увеличение обоих факторов. Обозначение «PR» внутри графика пути означает пропорциональное нагружение.

3. Результаты

3.1. Верификация в упругой области

Аналитическое решение для стержня квадратного сечения [1] даёт $J_t = 0.140577014955\,a^4 = 22492.3224\ mm^4$, $M_{ref} = GJ_t\theta$ и $N_{el} = Ea^2e_0$. Полярный момент $I_p = a^4/6 = 26666.667\ mm^4$ отличается от J_t и не определяет крутильную жёсткость квадрата.

Дополнительно оператор проверяется решением при $P^*(X,Y) = cos(\pi X)\cos(\pi Y)$ на $(X,Y) \in [-1/2, 1/2]^2$ со свободной границей и с правой частью $-2\pi^2P^*$. Здесь $X = x/a$, $Y = y/a$, $P = \Phi/\left(G\theta a^2\right)$; для упругой депланации $W = w/\left(\theta a^2\right)$ выполняется $\Delta_{X,Y}W = 0$. Независимые решения через w и Φ проверяют согласованность интегрального момента. Используется квадратура

$$\int_\Omega g\,dA \simeq h^2\sum_{i,j=0}^{n-1} c_ic_jg_{ij}, \qquad c_0 = c_{n-1} = \frac{1}{2}, \quad c_i = 1\ (1 \le i \le n-2). \tag{18}$$

$$\begin{array}{ll} E_M & = 100\left|\frac{M_h - M_{ref}}{M_{ref}}\right|, \qquad E_\infty = max\,|P_h - P^*|, \\ p_{obs} & = \frac{\ln\left(E_h/E_{h/2}\right)}{\ln 2}. \end{array} \tag{19}$$

Таблица 1. Сходимость упругого решения при различной плотности сеток.

Сетка	h, мм	E_M по Ф, %	E_M по w, %	E_∞ теста	SOR Ф/w
91×91	0.222222	0.040121	0.003752	1.015×10^{-4}	1375 / 3825
181×181	0.111111	0.010034	0.000941	2.538×10^{-5}	5600 / 14750
361×361	0.055556	0.002509	0.000236	6.345×10^{-6}	22575 / 56825

При уменьшении h вдвое ошибки уменьшаются приблизительно в четыре раза (табл. eftab:1), что означает точность $O\left(h^2\right)$ в упругой задаче. На сетке 181×181 ошибка для крутящего момента равна 0.000941%; для нормированной средней депланации порядок 10^{-18}, а относительное расхождение упругой энергии и внешней работы составляет 0.0007%.

3.2. Депланация и локальные траектории

Поле депланации имеет знакопеременную структуру, связанную с симметрией квадрата (рис. 2). Производные w совместно с крутильными и пластическими составляющими в (4) обеспечивают свободную границу. Это условие не требует обращения в нуль каждой компоненты касательного напряжения.

В точке P_1 траектории $\varepsilon_{yz}\,(\varepsilon_{xz})$ различаются на начальном участке и сближаются на последующем (рис. 3). На графике сопоставлены решения по теории средних кривизн и модели Прандтля–Рейсса. Форма траекторий согласуется с учётом направленной памяти в теории средней кривизны, однако расстояние между кривыми само по себе не оценивает точность относительно эксперимента.

При нагружении $M \to N$ кривые пластической деформации Прандтля–Рейсса и теории средних кривизн близки на первом участке и различаются на последующем (рис. 4(a)). К последнему показанному шагу значение по модели Прандтля–Рейсса достигает около 0.004. При расчётах по теории средних кривизн разные пути дают различные кривые накопления (рис. 4(b)) пластических

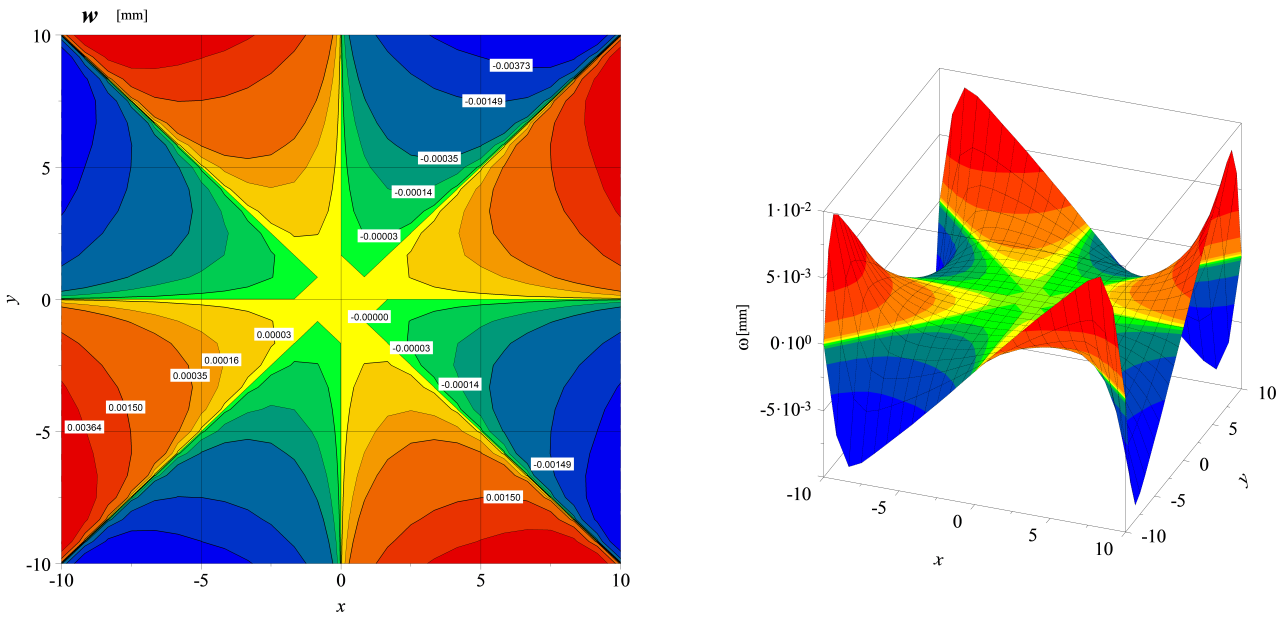


Рисунок 2. Поле депланации квадратного сечения при совместном кручении и осевом нагружении M–N: (a) контурное; (b) пространственное представление.

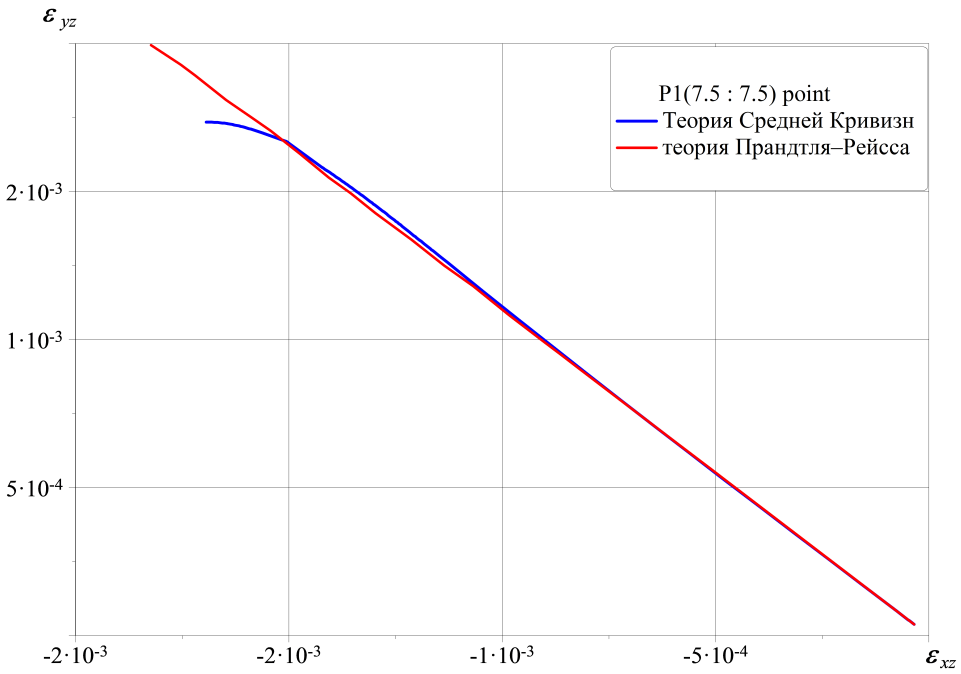
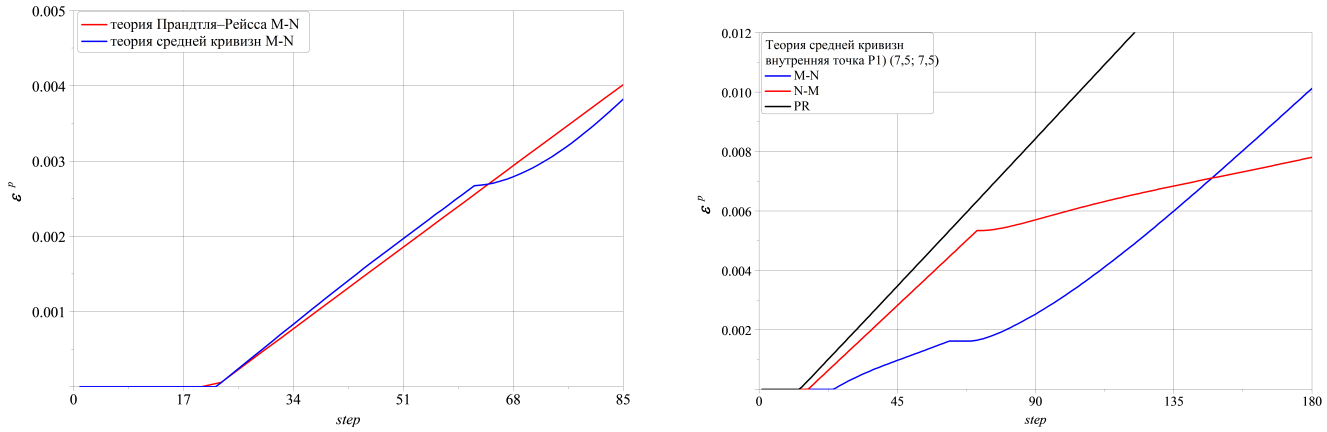


Рисунок 3. Траектории сдвиговых деформаций в точке P_1: теория средних кривизн и модель Прандтля–Рейсса согласно обозначениям исходного графика.

деформаций; пропорциональный путь имеет наиболее быстрый рост по показанной оси шага. Одинаковый номер шага для разных путей не означает одинаковых (N, M), поэтому пересечения кривых не являются сравнением при одной нагрузке.



(a) (b)

Рисунок 4. Пластическая деформация ε^p в точке P_1: (a) модель Прандтля–Рейсса и теория средней кривизны при $M \to N$; (b) теория средней кривизны для MN, NM и пропорционального нагружения (PR). Абсцисса — расчётный шаг.

В представленном сравнении моделей при одинаковом конечном (e_0, θ) относительное различие моментов, определяемое как $\delta_M = 100\,(M_{\mathrm{AC}} - M_{\mathrm{PR}})\,/M_{\mathrm{PR}}$, составляет 3.15% для MN, 6.42% для NM и 9.44% для пропорционального пути. Эти величины характеризуют различие расчётных реакций двух определяющих моделей при кинематическом сопоставлении.

4. Обсуждение

Основное уравнение задаётся в виде (5): история материала изменяет пластическое поле, его дивергенция формирует источник для w, а новое поле депланации изменяет напряжения и момент. Поэтому значения пластических деформаций и решение краевой задачи должны согласовываться на каждом шаге.

Различия теории средней кривизны и теории Прандтля–Рейсса отражают чувствительность расчётных значений к принятому учёту следа запаздывания векторных свойств материала.

Количественное сопоставление теории средней кривизны и теории Прандтля–Рейсса выполнено при единых амплитудах и шагах нагружения, едином определении пластической меры ε^p и одинаковой дискретизации. Контроль чувствительности к сетке и шагу интегрирования подтверждает устойчивость численных результатов при малых деформациях, свободной депланации и вдали от торцов.

При одинаковых конечных значениях силовых факторов M и N последовательности M–N, N–M и пропорциональное нагружение формируют различные локальные траектории деформирования и различное накопление пластической деформации. В пределах установленной численной точности различия между теориями обусловлены особенностями их определяющих соотношений, описывающих эволюцию напряжённо-деформированного состояния. Рассматриваемая постановка тем самым служит фундаментальным тестом для исследования направленной памяти и чувствительности теорий пластичности к траектории сложного нагружения.

Полученные результаты не устанавливают универсального преимущества одной теории, а выявляют характеристики процесса, по которым различия их описания становятся количественно и физически различимыми. Экспериментальная валидация, разгрузка и остаточные деформации составляют следующий самостоятельный этап исследования.

5. Выводы

Сформулирована задача растяжения–кручения квадратного стержня при помощи функции депланации с условиями Неймана. В уравнении Пуассона правая часть определяется дивергенцией пластических деформаций. Значения приращения пластических деформаций учитывают траекторию нагружения материала при расчёте поля перемещений.

В упругой задаче на трёх сетках подтверждена сходимость второго порядка точности; для сетки 181×181 ошибка при расчёте момента составила 0.000941%. При представленном кинематическом сопоставлении различия моментов по теории средней кривизны и модели Прандтля–Рейсса равны 3.15, 6.42 и 9.44% для MN, NM и пропорционального пути. Траектории деформирования также чувствительны к последовательности приложения нагрузок, однако сравнение по номеру шага требует учёта текущих силовых факторов.

Декларации / Declarations

Вклад авторов: В рукописи указан один автор, Жавлонбек Турдибеков, несущий ответственность за представленный материал. Конкретное распределение ролей по CRediT (концептуализация, методология, расчёты, визуализация, подготовка и редактирование текста) не приводится и подлежит подтверждению автором перед публикацией.

Author Contributions: The manuscript identifies one author, Javlonbek Turdibekov, responsible for the submitted work. Specific CRediT roles (conceptualization, methodology, calculations, visualization, drafting and editing) were not reported and require the author's confirmation before publication.

Финансирование: Информация о финансировании в представленной рукописи отсутствует. Автору необходимо подтвердить отсутствие внешнего финансирования либо указать источник, организацию и номер гранта.

Funding: No funding information is supplied in the source manuscript. The author must confirm that no external funding was received or provide the funding organization and grant number.

Одобрение этического комитета: Не применимо: исследование описывает математическое моделирование и численные расчёты механики деформируемого тела; данные об исследованиях с участием людей или животных отсутствуют.

Ethics Approval: Not applicable: the study presents mathematical modelling and numerical calculations in solid mechanics; no studies involving humans or animals are reported.

Информированное согласие и согласие на публикацию: Не применимо: исследование не включает участников-людей, персональные данные или сведения, позволяющие идентифицировать физических лиц.

Informed Consent and Consent for Publication: Not applicable: the research does not involve human participants, personal data or identifying information about individuals.

Доступность данных: В тексте приведены численные результаты для трёх расчётных сеток и графические результаты моделирования. Условия доступа к полным численным массивам, исходному программному коду и дополнительным данным в исходной рукописи не указаны; необходима информация автора.

Data Availability Statement: Numerical results for three meshes and simulation figures are reported in the article. Availability of complete numerical datasets, source code and supplementary data is not specified in the source manuscript; the author must provide a disclosure.

Благодарности: В исходной рукописи не указаны лица или организации для выражения благодарности. Автор должен подтвердить отсутствие дополнительных благодарностей либо сообщить сведения для включения в данный раздел.

Acknowledgments: The source manuscript does not identify contributors or organizations for acknowledgement. The author must confirm that no additional acknowledgments are due or provide the appropriate information.

Конфликт интересов: В исходной рукописи не указано наличие или отсутствие конфликта интересов. Автор должен подтвердить отсутствие конфликта либо раскрыть все потенциально значимые интересы.

Conflicts of Interest: The source manuscript does not state whether competing interests exist. The author must confirm that there are no conflicts of interest or disclose any relevant interests.

Сведения об использовании искусственного интеллекта: В ходе редакционно-технической подготовки рукописи использован инструмент генеративного искусственного интеллекта для переноса текста и математических выражений в LaTeX и подготовки проектов недостающих деклараций. Сведения об использовании ИИ при проведении самого исследования в исходной рукописи отсутствуют; автор должен проверить и утвердить настоящее раскрытие.

Artificial Intelligence Disclosure: Generative AI assisted the editorial-technical conversion of text and mathematical expressions into LaTeX and the drafting of missing declarations. The source manuscript does not disclose AI use in the underlying research; the author must review and approve this disclosure.

Обозначения и сокращения

Сокращения / Abbreviations. Обозначения и сокращения, использованные в статье / Symbols and abbreviations used in the article.

SOR	метод последовательной верхней релаксации / Successive Over-Relaxation
PR	пропорциональный путь нагружения (в легенде рисунка) / proportional loading path (in figure legend)
MN, NM	последовательности растяжения и кручения / sequential axial–torsional loading paths
Ω, a	поперечное сечение и сторона квадрата / cross-section and square side
w, θ	депланационное перемещение и интенсивность закручивания / warping displacement and twist rate
E, G, ν, H	модуль Юнга, модуль сдвига, коэффициент Пуассона и модуль упрочнения / Young's modulus, shear modulus, Poisson ratio and hardening modulus
M, N	крутящий момент и осевая сила / torque and axial force; N также обозначает поперечный касательный модуль в формулах (11)–(13) / N also denotes a transverse tangent modulus in Eqs. (11)–(13)
P	продольный касательный модуль в формулах (11)–(13) / longitudinal tangent modulus in Eqs. (11)–(13)
κ, q, χ, α	накопленная эквивалентная пластическая деформация, интенсивность напряжений, кривизна траектории и угол запаздывания / accumulated equivalent plastic strain, stress intensity, path curvature and lag angle

Список литературы

[1] Timoshenko SP, Goodier JN. Theory of Elasticity. McGraw-Hill; 1970. 3rd ed.; McGraw-Hill.

[2] Reddy JN. An Introduction to Continuum Mechanics. Cambridge University Press; 2013. 2nd ed.; Cambridge University Press; DOI 10.1017/CBO9781139178952.

[3] Borja RI. Plasticity: Modeling and Computation. Springer; 2013. Springer; DOI 10.1007/978-3-642-38547-6.

[4] de Souza Neto EA, Perić D, Owen DRJ. Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications. Wiley; 2008. Wiley; DOI 10.1002/9780470694626.

[5] Sidebottom OM. Evaluation of finite-plasticity theories for nonproportionate loading of torsion-tension members. Experimental Mechanics. 1972. Experimental Mechanics, 12, 18–24; DOI 10.1007/BF02320785.

[6] Yoshida K, Tsuchimoto T. Plastic flow of thin-walled tubes under nonlinear tension-torsion loading paths and an improved pseudo-corner model. International Journal of Plasticity. 2018. International Journal of Plasticity, 104, 214–229; DOI 10.1016/j.ijplas.2018.02.013.

[7] Ilyushin AA. Plastichnost. Osnovy obshchei matematicheskoi teorii [Plasticity. Fundamentals of the general mathematical theory]. Izdatelstvo Akademii nauk SSSR; 1963. Izdatelstvo Akademii nauk SSSR; in Russian.

[8] Zubchaninov VG. The general mathematical theory of plasticity and the Ilyushin postulates of macroscopic definability and isotropy. Moscow University Mechanics Bulletin. 2018. Moscow University Mechanics Bulletin, 73, 101–116; DOI 10.3103/S0027133018050011.

[9] Babamuratov KS, Abirov RA. On physical reliability in the theory of plasticity. Strength of Materials. 2001. Strength of Materials, 33, 1–7; DOI 10.1023/A:1010478208161.

[10] Abirov RA. On Plastic Behaviour of Materials under Complex Loading. Journal of the Mechanical Behavior of Materials. 2007. Journal of the Mechanical Behavior of Materials, 18(5–6), 341–348; DOI 10.1515/JMBM.2007.18.5-6.341.

[11] Abirov RA. On physical reliability and taking complex loading into account in plasticity. Materials Science. 2008. Materials Science, 44, 512–516; DOI 10.1007/s11003-009-9114-6.

[12] Xu B, Zhang R, Yang K, Yu G, Chen Y. Application of generalized finite difference method for elastoplastic torsion analysis of prismatic bars. Engineering Analysis with Boundary Elements. 2023. Engineering Analysis with Boundary Elements, 146, 939–950; DOI 10.1016/j.enganabound.2022.11.028.

[13] Moayyedian F, Grabski JK. Elastic-plastic torsion problem with non-linear hardenings using the method of fundamental solution. Archives of Civil and Mechanical Engineering. 2021. Archives of Civil and Mechanical Engineering, 21, 155; DOI 10.1007/s43452-021-00307-2.

[14] Pires PFM, Buriol TM, dos Santos T. An open-source finite element framework for Saint-Venant torsion of heterogeneous beams with arbitrary cross-sections. Journal of Engineering Mathematics. 2025. Journal of Engineering Mathematics, 155, 9; DOI 10.1007/s10665-025-10493-0.

[15] Chen H, Gomez J, Pindera MJ. Saint Venant torsion of homogeneous and composite bars by the finite volume method. Composite Structures. 2020. Composite Structures, 242, 112128; DOI 10.1016/j.compstruct.2020.112128.

[16] Abirov R, Turdibekov J. Axial-Torsional Path Dependence in an Elastoplastic Rod with a Multiply Connected Cross-Section. Applied Mechanics. 2026. Applied Mechanics, 7(3), 71; DOI 10.3390/applmech7030071.

[17] LeVeque RJ. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems. SIAM; 2007. SIAM; DOI 10.1137/1.9780898717839.

[18] Strniša F, Jančič M, Kosec G. Numerical analysis of small-strain elasto-plastic deformation using local Radial Basis Function approximation with Picard iteration. Applied Mathematical Modelling. 2025. Applied Mathematical Modelling, 137, 115714; DOI 10.1016/j.apm.2024.115714.

Отказ от ответственности / Примечание издателя

Утверждения, мнения и данные во всех публикациях принадлежат исключительно отдельным авторам и участникам и не обязательно отражают взгляды издателя, журнала или редакторов. Издатель, журнал и редакторы не несут ответственности за вред людям или ущерб имуществу, возникшие вследствие использования идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в тексте.

Disclaimer of Liability/Publisher's Note

The statements, opinions, and data contained in all publications are solely those of the individual author(s) and contributor(s) and do not necessarily reflect the views of the Publisher, the Journal, or the editors. The Publisher, the Journal, and the editors disclaim responsibility for any injury to persons or damage to property resulting from any ideas, methods, instructions, or products referred to in the content.