Uzbek Journal “Problems of Mechanics”

научная статья

DOI: 10.68846/pmjournal-2026-37-00003

Вынужденные изгибные колебания полимерной трубы с потоком идеальной жидкости

Зафар Болтаев[1*], **Гульзира Мирзоева**[1*], **Дильдора Салимова**[2], **Нурбек Исаев**[3]

[1] Кафедра точных наук, Бухарский государственный технический университет, Бухара, Узбекистан
[2] Бухарский государственный технический университет, Бухара, Узбекистан
[3] Кафедра математики, Джизакский государственный педагогический университет, Джизак, Узбекистан
[*]**Автор для корреспонденции:** boltayev_zafar@bstu.uz
[*]**Автор для корреспонденции:** gmirzoyeva@bstu.uz

Поступила: 18 июня 2026 | **Доработана:** 15 августа 2026 | **Принята:** 05 сентября 2026 | **Опубликована:** 30 сентября 2026

АННОТАЦИЯ

В работе рассматривается вынужденные изгибные колебания полимерной трубы с потоком идеальной жидкости. Теоретически исследовано влияние потока жидкости на вынужденные колебания полимерной трубы под действием внешней вынуждающей силы. Методом малых возмущений получены аналитические зависимости поля смещений от частоты, скорости потока жидкости, места приложения силы и параметров трубы и жидкости. Показано, что поток жидкости оказывает наибольшее влияние на колебания в окрестности резонанса высший моды колебаний трубопровода с жидкостью.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

жидкость; полимерная труба; вынужденные колебания; резонанс; дисперсионные уравнения

Forced bending vibrations of a polymer pipe conveying an ideal fluid

Zafar Boltayev[1*], **Gulzira Mirzoyeva**[1*], **Dildora Salimova**[2], **Nurbek Isayev**[3]

[1] Department of Exact Sciences, Bukhara State Technical University, Bukhara, Uzbekistan
[2] Bukhara State Technical University, Bukhara, Uzbekistan
[3] Department of Mathematics, Jizzakh State Pedagogical University, Jizzakh, Uzbekistan
[*]**Corresponding author:** boltayev_zafar@bstu.uz
[*]**Corresponding author:** gmirzoyeva@bstu.uz

ABSTRACT

The paper considers forced bending vibrations of a polymer pipe conveying an ideal fluid. The influence of the fluid flow on the forced vibrations of the polymer pipe under an external driving force is studied theoretically. Using the method of small perturbations, analytical dependences of the displacement field on the frequency, the fluid flow velocity, the point of force application, and the parameters of the pipe and the fluid are obtained. It is shown that the fluid flow has the greatest effect on the vibrations in the vicinity of the resonance of a higher vibration mode of the pipeline with fluid.

KEYWORDS

fluid; polymer pipe; forced vibrations; resonance; dispersion equations

1. Введение

Основной цель настоявшей работы состоит в изучении влияния потока жидкости внутри трубы на собственные частоты колебаний и на потерю устойчивости [1–3]. В [4] выведены уравнения движения и исследовано влияние потока на резонансные частоты отрезка трубы постоянной кривизны с защемленными и опертыми концами. В [5] получены дисперсионные уравнения для волн в бесконечной искривленной трубе с потоком, причем, в дополнение к результатам, учтена возможность растяжения средней линии трубы и таким образом введены в рассмотрение квазипродольные волны. Анализ вибраций трубопроводов, транспортирующих жидкость, является критически важным аспектом задач взаимодействия жидкости и конструкции [6, 7]. В связи с их широким применением в морских трубопроводах полимерные и стальные материалы [8, 9] позволяет подвешивать транспортировки нефте- газовых продуктов. Также посвящено значительно число работ по теплообменников [10] и нефте-газопроводов [11, 12], динамическое поведение таких систем в последние годы привлекает значительное внимание исследователей. Во многих из этих применений скорость жидкости зависит от времени и подвержена влиянию внешних факторов, таких как работа клапанов или насосов. Кроме того, механический отклик многих материалов, обычно используемых при строительстве трубопроводов, транспортирующих жидкость, демонстрирует вязко-упругое поведение, которое может существенно повлиять на их динамические характеристики и устойчивость. В результате точное понимание динамического поведения системы имеет важное значение для предотвращения потенциальных структурных отказов. Достижение этой цели требует разработки реалистичной математической модели в сочетании с высокоточным аналитическим или численным методом решения [13, 14].

Динамическое поведение трубопроводов, транспортирующих жидкость, с изменяющейся во времени скоростью потока привлекло значительное внимание исследователей, как в контексте линейных, так и нелинейных подходов к моделированию [15]. Результаты показывают, что при определенных условиях, трубы, подверженные зависящим от времени скоростям потока жидкости, могут испытывать явления параметрического резонанса [16]. Когда скорость потока жидкости колеблется, труба становится восприимчивой к параметрическим неустойчивостям в зависимости от амплитуды и частоты колебаний скорости. Подробные исследования такого поведения, основанные на линейных моделях трубопроводов, транспортирующих жидкость, с просто закрепленными границами на обеих концах приведены в [17]. В работе исследованы поперечные колебания труб с гармонически изменяющимися скоростями потока как теоретически [18], так и экспериментально [19]. Ими выведены уравнения системы нелинейных уравнений движения с управлениями, используя второй закон Ньютона, а затем дискретизировали их методом Галеркина с помощью ортогональных функций сравнения.

Исследования колебаний и волн в трубах, содержащих движущуюся жидкость, представляют значительный интерес для многих областей техники и имеют приложения в проектировании нефтепроводов, топливных систем, компонентов атомных реакторов и т.п.

Настоящая работа посвящена изучению динамического состояния вязкоупругого трубопровода с протекающей жидкостью. Задача решается аналитическим путём, но при получении числовых результатов, применяются методы замораживание, Гаусса, Мюллера и интегральные преобразования Лапласа и Фурье.

2. Постановка задачи и методики решения

Рассмотрим полимерную трубу, заполненную покоящейся жидкостью. Примем простейшую стержневую модель поперечных колебаний, в которой жесткость создается изгибной жесткостью стенок трубы (рис. 1), а погонная масса состоит из погонных масс стенок трубы M_0 и заполняющей ее жидкости m:

$$(M_0 + m)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + E_0 J\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \int_0^t R_E(t-\tau)\frac{\partial^4 w(x,\tau)}{\partial x^4}\,d\tau\right] = f(x,t) \tag{1}$$

где w — поперечное смещение трубы; x — координата вдоль оси трубы; E — модуль Юнга материала стенки трубы; $R_E(t-\tau)$ - ядро релаксации материала трубы; $J=\frac{\pi}{8}d^3h$ — момент инерции стенки трубы; d — диаметр трубы; h — толщина стенки трубы (труба считается тонкостенной: $h \ll d$); $M_0=\rho_0\pi dh$; $m=\rho\frac{\pi}{4}d^2$; ρ_0 — плотность материала стенки трубы; ρ — плотность жидкости; $f(x,t)$ — распределение внешних сил, перпендикулярных оси трубы, E_0– мгновенный модуль упругости. Далее заменим уравнения (1) на следующие [20]:

$$(M_0 + m)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + E_0 J\left[1 - \Gamma_E^c(\omega_R) - i\Gamma_E^S(\omega_R)\right]\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = f(x,t) \tag{2}$$

где

$$\Gamma_E^c(\omega_R) = \int_0^\infty R_E(\tau)\cos(\omega_R\tau)\,d\tau, \qquad \Gamma_E^S(\omega_R) = \int_0^\infty R_E(\tau)\sin(\omega_R\tau)\,d\tau \tag{3}$$

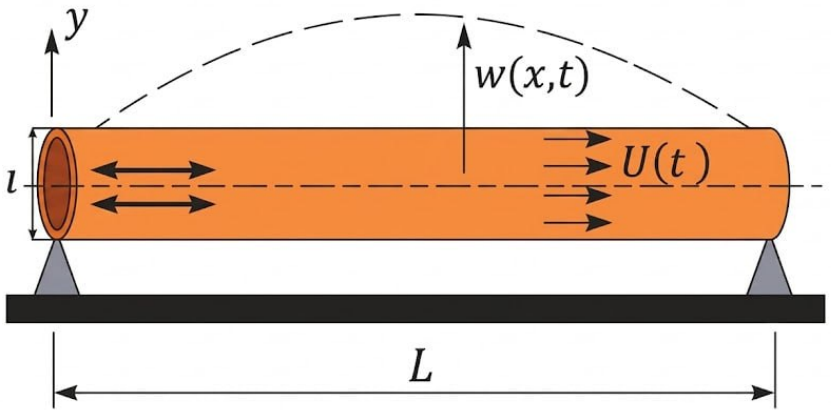


Рисунок 1. Расчетная схема

Здесь $\Gamma_E^c(\omega_R), \Gamma_E^s(\omega_R)$- косинус и синус изображения Фурье ядер релаксаций; ω_R-действительная величина. В расчетах использовалось трехпараметрическое ядро релаксации Колтунова-Ржаницына: $R_k(t)=A_k e^{-\beta_k t}/t^{1-\alpha_k}$.

Учет движения среды в трубе со скоростью U проводится добавлением к оператору дифференцирования по времени $\partial/\partial t$ в слагаемом $m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ выписанного выше уравнении, конвективного оператора $U\partial/\partial x$: $m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Rightarrow m\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 w$. В результате получим:

$$M\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2mU\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + mU^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E_0 J\left[1 - \Gamma_E^c(\omega_R) - i\Gamma_E^S(\omega_R)\right]\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = f(x,t) \tag{4}$$

$M = M_0 + m$ — суммарная погонная масса трубы.

Переходим в (4) к гармонической по времени задаче: $w(x,t) = Y(x,\omega)\exp(-i\omega t)$, $f(x,t) = F(x,\omega)\exp(-i\omega t)$:

$$-M\omega^2 Y + 2mU(-i\omega)\frac{dY}{dx} + mU^2\frac{d^2 Y}{dx^2} + E_0 J\left[1 - \Gamma_E^c(\omega_R) - i\Gamma_E^S(\omega_R)\right]\frac{d^4 Y}{dx^4} = F(x,\omega) \tag{5}$$

Здесь $\omega = \omega_R + i\omega_I$ и $F(x,\omega)$- комплексная частота и амплитуда внешних воздействий. Поток дает два дополнительных слагаемых в (5): второе слагаемое, пропорциональное первой степени скорости и третье слагаемое, пропорциональное квадрату скорости.

Далее рассматриваются вынужденные колебания отрезка трубы $0 \le x \le L$ с граничными условиями защемления в краях $x = 0, L$:

$$Y(0) = 0, \qquad Y(L) = 0, \qquad \frac{dY(0)}{dx} = 0, \qquad \frac{dY(L)}{dx} = 0 \tag{6}$$

Для того, чтобы объяснить физическую сущность задачи сперва рассмотрим собственные колебания рассматриваемой механической системы. Для этого построим дисперсионное уравнение с комплексно выходящим параметром. Дисперсионное уравнение, связывающее комплексную частоту с волновым числом k, которое определяется при решении следующего трансцендентного уравнения:

$$k^4 - K(\omega_R,\omega_I)^4\left(1 - 2\frac{m}{M}U\frac{k}{\omega} + \frac{m}{M}U^2\left(\frac{k}{\omega_R + i\omega_I}\right)^2\right) = 0 \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} K(\omega) &= \left(\frac{M\omega^2}{E_0 J[1 - \Gamma_E^c(\omega_R) - i\Gamma_E^S(\omega_R)]}\right)^{1/4} \\ &= 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{\omega}{\bar{c}_y d}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{d}{h}\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/4}. \end{aligned} \tag{8}$$

здесь $\bar{c}_y = \sqrt{\frac{E_0\left[1 - \Gamma_E^c(\omega_R) - i\Gamma_E^S(\omega_R)\right]}{\rho_0}}$ — скорость продольных волн в стенке пустой трубы. В отсутствие потока ($U = 0$) это уравнение дает четыре волновых числа $k_j^{(0)} = K\exp\left(i\frac{\pi}{2}j\right)$, $j = 0..3$: два действительных ($j = 0, 2$) — однородные волны и два чисто мнимых ($j = 1, 3$) — неоднородные волны.

Из (7) видно, что влияние потока на волновые числа изгибных волн и на резонансные частоты защемленного отрезка трубы определяется величиной $\frac{1}{2}\frac{m}{M}\frac{U}{c_b}$, где $c_b = \omega / K(\omega)$ — фазовая скорость изгибной волны в трубе в отсутствие потока. Это влияние может быть существенно при скоростях потока, сравнимых с c_b. В работах, посвященных неустойчивости труб с потоком [3–7], основное внимание уделяется как раз этой области скоростей.

В настоящей работе, напротив, рассматривается только область малых скоростей. При выполнении этого условия волновые числа мало изменяются при включении потока. Также мало изменяются и резонансные частоты защемленного отрезка трубы. Однако, как показано ниже, поток может сильно влиять на передаточные функции при вынужденных колебаниях трубы. Именно это влияние исследуется ниже.

Представим поле поперечных смещений отрезка трубы, защемленной в сечениях $x = 0$, $x = L$, в виде суммы по полной, ортогональной системе собственных функций $\Phi_n(x)$ трубы с неподвижной жидкостью. Каждая из этих функций удовлетворяет граничным условиям (6) и уравнению движения:

$$\frac{d^4\Phi_n}{dx^4} = k_n^4\Phi_n, \qquad k_n = K(\omega_{Rn}, \omega_{In}) \tag{9}$$

В явном виде моды колебаний для трубы с защемленными концами имеют вид:

$$\Phi_n(x) = -\cos(k_n x) + \cosh(k_n x) + \frac{\cosh X_n - \cos X_n}{\sin X_n - \sinh X_n}\left[\sin(k_n x) - \sinh(k_n x)\right] \tag{10}$$

Здесь X_n — константы, корни уравнения:

$$\cos(X_n)\,\mathrm{ch}(X_n) - 1 = 0 \tag{11}$$

Решения последнего уравнения: $C = (4.730; 7.859; 10.996; 14.137\ldots \approx \frac{\pi}{2}(2n+1))$.

Резонансные частоты ω_n колебаний трубы с неподвижной жидкостью выражаются через эти константы с учетом (8):

$$\omega_n^2 = \frac{E_0 J[1 - \Gamma_E^c(\omega_R) - i\Gamma_E^S(\omega_R)]}{ML^4} X_n^4 = \frac{1}{8^2}\frac{\bar{c}_y^2 d^2}{L^4}\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{d}{h}\frac{\rho}{\rho_0}} X_n^4. \tag{12}$$

Если в качестве датчиков используются не датчики смещения, а датчики деформации, то наряду с собственными модами смещения (10) следует использовать и собственные моды изгибных деформаций, пропорциональных второй производной смещений по координате X. Решение задачи о возбуждении трубы внешней силой ищем в виде разложения по собственным модам колебаний:

$$w(x,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Phi_n(x) \tag{13}$$

Подставляя (13) в уравнение движения (5), получим:

$$\sum_n (-\omega^2 + \omega_n^2)\Phi_n(x) A_n = \frac{1}{M} F_0(x,\omega) - \frac{m}{M}\sum_n \left[2(-i\omega)\Phi_n'(x)U + \Phi_n''(x)U^2\right] A_n \tag{14}$$

Умножаем уравнение (14) на $\Phi_m(x)$ и интегрируем по всей длине трубы. Вследствие ортогональности собственных функций в левой части останется только одна амплитуда. В правой части, содержащей скорость потока, получится сумма всех слагаемых с разными весами, так как собственные функции не ортогональны их производным.

Вводим обозначения:

$$D1_{nm} = \int_0^L \Phi_n'(x)\Phi_m(x)\,dx, \quad D2_{nm} = \int_0^L \Phi_n''(x)\Phi_m(x)\,dx, \quad K_n = \int_0^L \Phi_n(x)\Phi_n(x)\,dx, \quad F_n(\omega) = \int_0^L F_0(x,\omega)\Phi_n(x)\,dx. \tag{15}$$

Заметим, что диагональные компоненты матрицы $D1_{nn}$ равны нулю. Получаем систему уравнений для нахождения амплитуд A_n:

$$A_n = \frac{1}{(-\omega^2 + \omega_n^2)K_n}\left[\frac{1}{M}F_n(\omega)\right] - \frac{1}{(-\omega^2 + \omega_n^2)K_n}\frac{m}{M}\sum_s \left[2(-i\omega)D1_{sn}U + D2_{sn}U^2\right] A_s \tag{16}$$

В частном случае точечного возбуждения силой $F(x) = F_0\delta(x - x_0)$ в точке x_0, имеем:

$$F_n(\omega) = F_0\Phi_n(x_0) \tag{17}$$

Из формулы (17) видно, что амплитуды мод зависят от точки приложения силы. В частности, если поместить силу в точку, где $\Phi_n(x)$ равна нулю, то первое слагаемое в (16) справа также равно нулю.

Обратим внимание на то, что слагаемые в правой части системы для A_n, пропорциональные первой степени скорости U, не дают вклада в эту же моду ($D1_{nn} = 0$). Квадратичные слагаемые по U дают вклад в эту же моду ($D2_{nn} \neq 0$). С учетом этого (17) переписывается в виде:

$$A_n = \frac{\frac{1}{M}\left[F_{0n}(\omega) - m\sum_{s\neq n}\left(2(-i\omega)D1_{sn}U + D2_{sn}U^2\right)A_s\right]}{\left(-\omega^2 + \omega_n^2 + \frac{m}{K_n M}D2_{nn}U^2\right)K_n} \tag{18}$$

Первый сомножитель справа (18) описывает сдвиг резонансных частот под действием потока. Добавка к квадрату резонансной частоты равна $\Delta(\omega_n^2) = \frac{m}{M}\frac{D2_{nn}}{K_n}U^2$. Этот сдвиг пропорционален квадрату скорости потока. Далее будем считать, что эта добавка мала и ее можно не учитывать (в экспериментах, описанных ниже, она не превышает 10^{-3}).

Далее рассматриваем взаимодействие только двух первых мод колебаний, исключив из суммы в правой части (18) все слагаемые, кроме них. Это упрощение сделано только для того, чтобы избежать громоздких формул и получить простой аналитический ответ. Как будет ясно из дальнейшего, оно не меняет принципиальных выводов работы. Не будем также учитывать слагаемые с U^2. Получим следующую систему:

$$A_1 = \frac{1}{(-\omega^2 + \omega_1^2)K_1}\left[-\frac{m}{M}2(-i\omega)D1_{21}UA_2 + \frac{1}{M}F_{01}(\omega)\right], \quad A_2 = \frac{1}{(-\omega^2 + \omega_2^2)K_2}\left[-\frac{m}{M}2(-i\omega)D1_{12}UA_1 + \frac{1}{M}F_{02}(\omega)\right]. \tag{19}$$

Имеем перекрестное влияние потока на моды. Первая мода влияет через поток на вторую моду (но не влияет сам на самого себя), вторая мода влияет на первую и не влияет на самого себя.

Ограничимся случаем малых скоростей и используем метод малых возмущений (разумеется, данную систему можно решить

точно).

В нулевом приближении имеем:

$$A_1^{(0)} = \frac{1}{-\omega^2 + \omega_1^2}\frac{1}{K_1 M}F_{01}(\omega), \quad A_2^{(0)} = \frac{1}{-\omega^2 + \omega_2^2}\frac{1}{K_2 M}F_{02}(\omega)$$

Подставляя нулевые приближения в правую часть уравнений (19), получаем амплитуды в первом приближении и учитывая, что $D1_{12} = -D1_{21} = D1 = \int_0^L \Phi_1(x)\Phi_2(x)dx$, получим окончательное выражение для поля смещения:

$$y(x, x_0, \omega) = \frac{F_0(\omega)}{M}\left\{\frac{\Phi_1(x_0)\Phi_1(x)}{(-\omega^2 + \omega_1^2)K_1} + \frac{\Phi_2(x_0)\Phi_2(x)}{(-\omega^2 + \omega_2^2)K_2} + \frac{2i\omega D1U\left[\Phi_2(x_0)\Phi_1(x) - \Phi_1(x_0)\Phi_2(x)\right]}{K_1K_2(-\omega^2 + \omega_1^2)(-\omega^2 + \omega_2^2)M}\right\}. \tag{20}$$

Для дальнейшего анализа полезно перейти в этой формуле к безразмерным частотам Ω. В качестве нормировочной частоты возьмем первую резонансную частоту: $\omega = \omega_1\Omega$, $\omega_2 = \omega_1\Omega_2$. Нормируем также смещения на вынуждающую силу, а координату x на длину трубы L: $X = x/L$. В результате получаем:

$$\xi(X, \Omega) = \frac{y(X, \Omega)}{F_0(\Omega)/(M\omega_1^2 L)} = \left\{\frac{\Phi_1(X_0)\Phi_1(X)}{(-\Omega^2 + 1)K_1} + \frac{\Phi_2(X_0)\Phi_2(X)}{(-\Omega^2 + \Omega_2^2)K_2} + \frac{D1\left[\Phi_2(X_0)\Phi_1(X) - \Phi_1(X_0)\Phi_2(X)\right]}{K_1K_2(-\Omega^2 + 1)(-\Omega^2 + \Omega_2^2)}\Omega\frac{m}{M}i\bar{U}\right\}. \tag{21}$$

нормированная скорость потока $\bar{U}$ равна:

$$\bar{U} = \frac{2U}{\omega_1 L} = \frac{16}{C_1^2}\frac{U}{c_y}\frac{L}{d}\sqrt{1 + \frac{1}{2}\frac{d}{h}\frac{\rho}{\rho_0}}$$

Формула (21) является исходной для анализа влияния потока жидкости на характеристики колебательной системы. Первые два слагаемых в фигурных скобках справа описывают колебания в отсутствие течения, третье слагаемое дает вклад течения. Для применимости методов возмущений правая часть (21) должна быть много меньше единицы. В лабораторных экспериментах, описанных ниже, этот параметр не превышает величины 10^{-1}.

3. Результаты и анализ

Результаты расчетов приведены на рисунках 2–4. На рисунке 2 приведены смешения в первых трех изгибных модах колебаний. В качестве примера вязкоупругого материала примем трехпараметрическое ядро релаксации Колтунова-Ржаницына $R_\kappa(t) = A_\kappa e^{-\beta_\kappa t}/t^{1-\alpha_\kappa}$. Для получения численных результатов использовались следующие значения параметров: $A_1 = 0,048; \beta_1 = 0,05; \alpha_1 = 0,1$.

Если же и возбуждение колебаний производится путем ее изгиба внешним моментом, то и по координате возбуждения x_0 нужно продифференцировать два раза. В результате, в (20) функции $\Phi_{1,2}$ нужно заменить на функции $\Phi_{1,2}''$ из (13).

Возбуждающая сила прикладывается в центре трубы, где первая мода имеет максимум. Вычисления проводились в двух точках, симметричных относительно центра. В отсутствие потока главный вклад дает первое резонансное слагаемое. Добавка, создаваемая потоком, также имеет резонансный характер, однако ее величина является малой величиной порядка $\bar{U}$ по сравнению с первым слагаемым. Идея заключается в том, чтобы возбуждать трубу в такой точке, в которой в отсутствие потока она резонансно не возбуждается.

Например, при возбуждении в центре трубы в отсутствие потока не возбуждается вторая мода, так как $\Phi_2(0.5) = 0$. Второе слагаемое в правой части (20) равно нулю. Следовательно, если частота возбуждения будет совпадать с резонансной частотой второй моды, резонансная раскачка трубы будет обеспечиваться только за счет третьего слагаемого в правой части (20). Иными словами, вблизи от резонанса резонансное усиление колебаний трубы будет вызвано исключительно потоком. Все моды дадут вклад во вторую, резонансную моду только при включении потока. При работе вблизи второй резонансной частоты, (20) можно переписать в виде, проясняющем суть дела:

$$\hat{\xi}(\Omega, X) = A(X_0, X) + \frac{B(X_0, X) + C(X_0, X)i\bar{U}}{-\Omega^2 + \Omega_2^2(1 + i\delta)} \tag{22}$$

где

$$A(X_0, X) = \frac{1}{-\Omega^2 + 1}\frac{1}{K_1}\Phi_1(X_0)\Phi_1(X) \quad B(X_0, X) = \frac{1}{K_2}\Phi_2(X_0)\Phi_2(X) \quad C(X_0, X) = \frac{D1}{K_1K_2(-\Omega^2 + 1)}\left[\Phi_2(X_0)\Phi_1(X) - \Phi_1(X_0)\Phi_2(X)\right]\Omega\frac{m}{M}$$

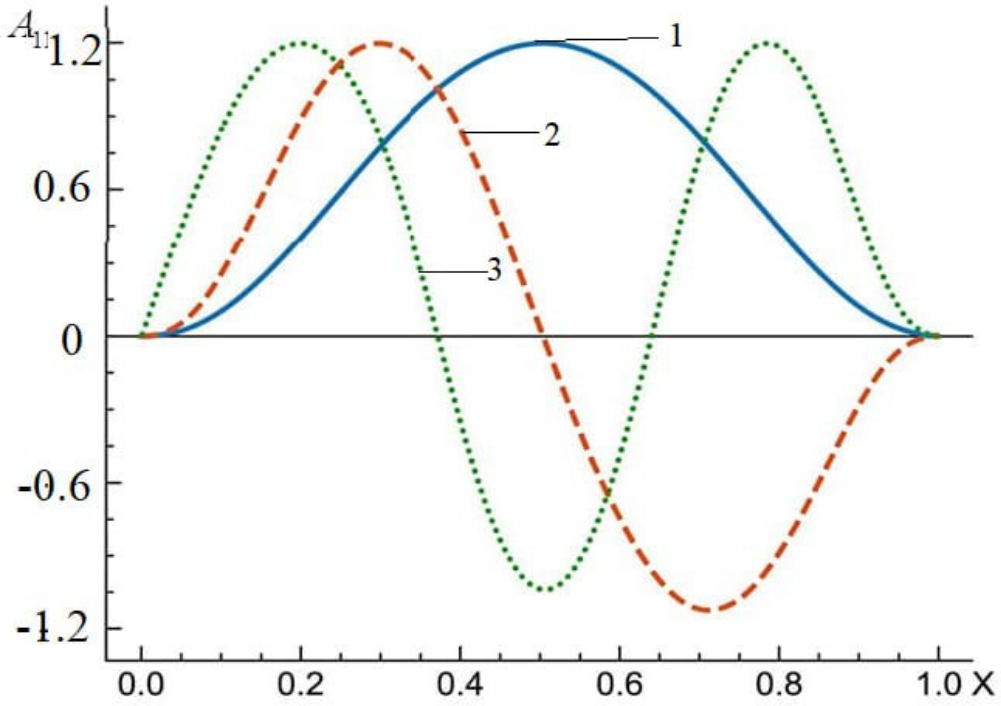


Рисунок 2. Смешения для первых трех мод колебаний: 1 — первая мода, 2 — вторая мода, 3 — третья мода

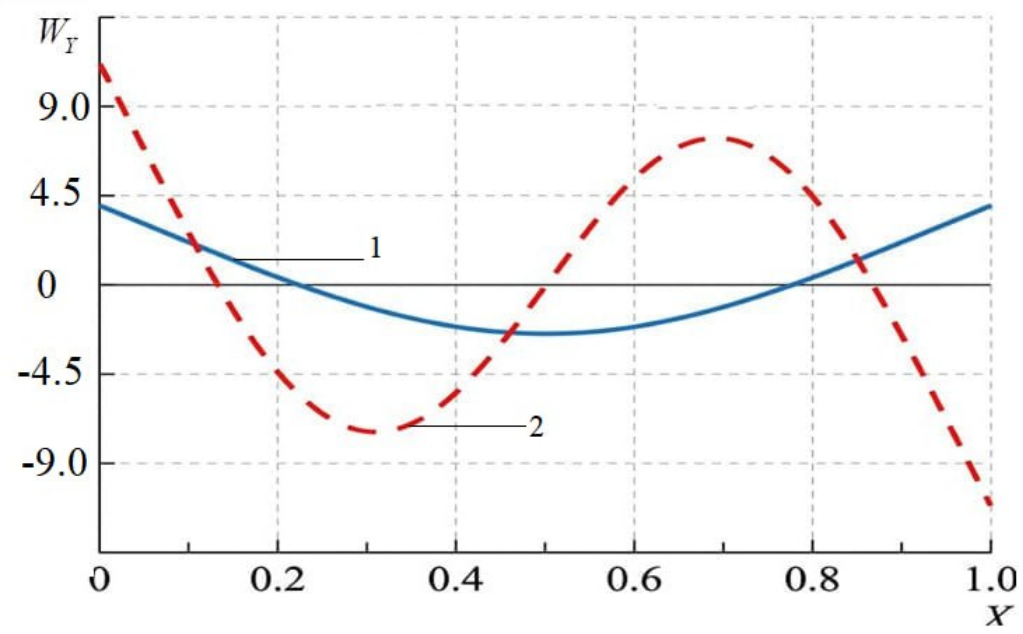


Рисунок 3. Деформация изгиба для первых двух мод колебаний: 1 — первая мода, 2 — вторая мода, 3 — третья мода

В знаменателе второго слагаемого правой части (22) добавлено мнимое слагаемое $i\delta$, учитывающее потери энергии в системе. Константы A, B, C слабо зависят от частоты вблизи от $\Omega = \Omega_2$ и этой зависимостью можно пренебречь. Они также плавно зависят от координат излучения и приема, могут иметь разные знаки и в точках общего положения имеют величины порядка единицы. Если течение отсутствует, функция имеет характерный вид суммы нерезонансного и резонансного слагаемых. Добавка, вызванная потоком, чисто мнимая и входит в резонансное слагаемое. Если поместить излучатель в точку, где $\Phi_2(X_0) = 0$ ($B(X_0, X) = 0$), то на резонансной частоте слагаемое с потоком будет доминировать.

Рассмотрим участок трубы из нержавеющей стали (плотность $\rho = 7.8 \times 10^3$ kg/m^3) длиной 1000 мм с внешним диаметром 16 мм и внутренним диаметром 10 мм. В качестве жидкости используется вода, подающаяся по пластиковым трубкам центробежным насосом. Скорость потока до 3.5 м/с.

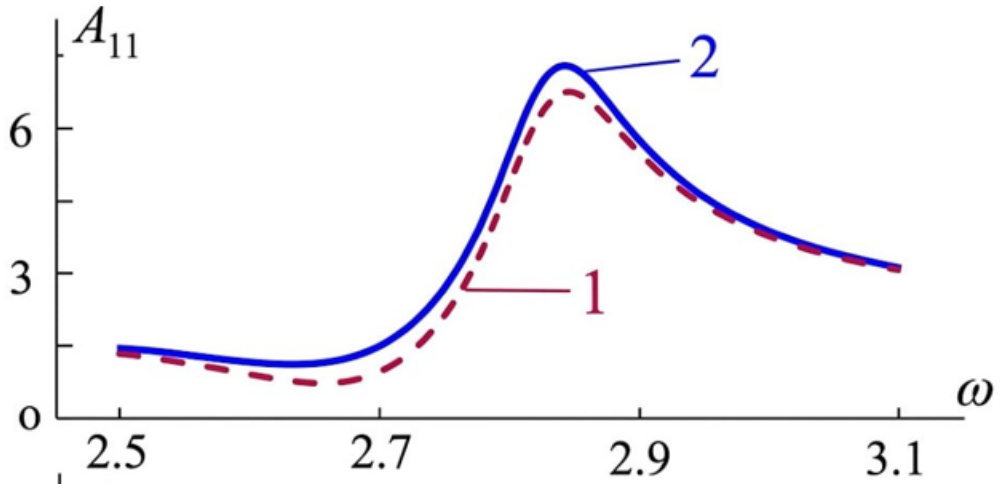


Рисунок 4а. Амплитудно-частотная характеристика для $l_0 = 1/10$: 1 — с жидкостью, 2 — без жидкости

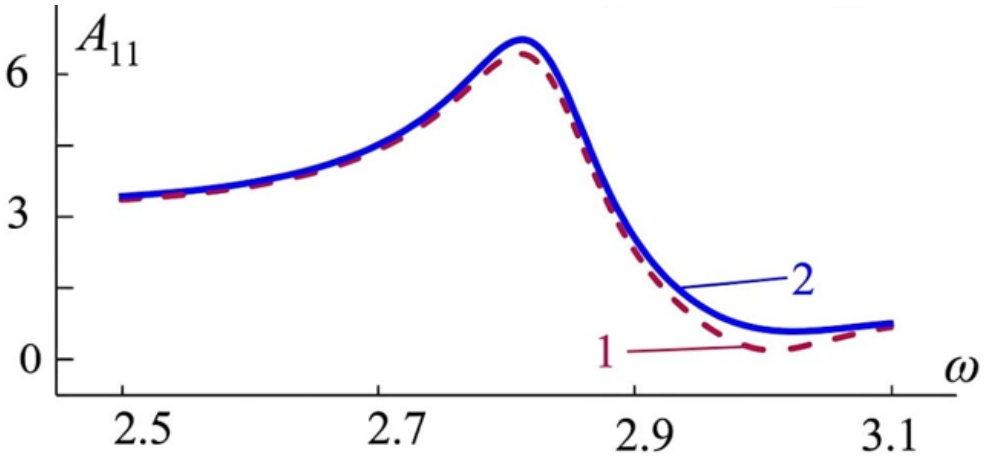


Рисунок 4б. Амплитудно-частотная характеристика в точках, отстоящих от краев на $l_0 = 3/5$ (1 — с жидкостью, 2 — без жидкости)

Таким образом, прогибы трубопроводов очень чувствительны на скорости потока и небольшие изменения жидкости.

4. Выводы

В строгой математической постановке получено аналитическое решение задачи колебаний вязкоупругого трубопровода протекающей жидкостью. Исследовано влияние потока жидкости внутри трубы на ее колебания под действием внешней вынуждающей силы. Теоретически исследовано изменение частотного диапазона на чувствительности функции прогиба трубопровода. При работе в частотной области резонанса второй моды чувствительность к потоку в десятки раз выше, чем в области резонанса первой моды. Вязкость материала влияет на прогибы трубопровода до 15%.

Декларации / Declarations

Вклад авторов: Концептуализация, З.Б.; методология, З.Б. и Г.М.; программное обеспечение, Г.М. и Д.С.; валидация, Г.М. и Д.С.; формальный анализ, З.Б. и Г.М.; проведение исследования, Г.М., Д.С. и Н.И.; написание первоначального варианта рукописи, Г.М.; рецензирование и редактирование текста, З.Б., Г.М., Д.С. и Н.И.; визуализация, Д.С. и Н.И.; научное руководство, З.Б. Все авторы прочитали и одобрили опубликованную версию рукописи.

Author Contributions: Conceptualization, Z.B.; methodology, Z.B. and G.M.; software, G.M. and D.S.; validation, G.M. and D.S.; formal analysis, Z.B. and G.M.; investigation, G.M., D.S. and N.I.; writing—original draft preparation, G.M.; writing—review and editing, Z.B., G.M., D.S. and N.I.; visualization, D.S. and N.I.; supervision, Z.B. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Финансирование: Данное исследование не получало внешнего финансирования.

Funding: This research received no external funding.

Одобрение этического комитета: Не применимо.

Ethics Approval: Not applicable.

Информированное согласие и согласие на публикацию: Не применимо.

Informed Consent and Consent for Publication: Not applicable.

Доступность данных: Данные, подтверждающие результаты данного исследования, доступны у автора для корреспонденции по обоснованному запросу.

Data Availability Statement: The data supporting the findings of this study are available from the corresponding author upon reasonable request.

Конфликт интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflicts of interest.

Список литературы

[1] Farzad R, Lotfi V. Modal analysis of concrete arch dam–reservoir–massed foundation system in frequency domain. Proc Inst Civ Eng Struct Build. 2023;176(4):244–256.

[2] Azizi Y, Yazdizadeh A. A new uniformly ultimate boundedness criterion for temperature dependent average bristle deflections. Int J Eng. 2020;33(6):1128–1133.

[3] Kolesnikov KS, Samojlov EA, Rybak SA. Dinamika toplivnyh sistem ŽRD [Dynamics of liquid-propellant rocket engine fuel systems]. Mašinostroenie; 1975. (In Russian).

[4] Housner GW. Bending vibrations of a pipeline containing flowing fluid. J Appl Mech. 1952;19:205–208.

[5] Gregory RW, Paidoussis MP. Unstable oscillations of tubular cantilevers conveying fluid. I. Theory. Proc R Soc Lond A. 1966;293:512–527.

[6] Askarian A, Permoon M, Zahedi M, Shakouri M. Stability analysis of viscoelastic pipes conveying fluid with different boundary conditions described by fractional Zener model. Appl Math Model. 2022;103:750–763.

[7] Luczko J, Czerwiński A. Parametric vibrations of pipes induced by pulsating flows in hydraulic systems. J Theor Appl Mech. 2014;52(3):719–730.

[8] Wang Y, Tang M, Yang M, Qin T. Three-dimensional dynamics of a cantilevered pipe conveying pulsating fluid. Appl Math Model. 2023;114:502–524.

[9] Yang W, Tao Y, Li X, Chen H. Vibration suppression mechanism of pulsating flow in pipe with tube bundle rectifier. J Vib Eng Technol. 2022;10(6):2373–2384.

[10] Huang Q, Lin T, Safarpour M. Flow-induced vibration attenuation of a viscoelastic pipe conveying fluid under sinusoidal flow using a nonlinear absorber. Mech Based Des Struct Mach. 2022;50(5):1673–1703.

[11] Oyelade AO, Ikhile OG, Oyediran AA. On stability of a slightly curved Maxwell viscoelastic pipe conveying fluid resting on linear viscoelastic foundation. Aust J Mech Eng. 2022;20(4):1164–1171.

[12] Ding H, Ji JC. Vibration analysis and control of pipes conveying fluid: a review. Appl Math Mech (Engl Ed). 2023;44(9):1423–1456.

[13] Hao MY, Ding H, Mao XY, Chen LQ. Stability and nonlinear response analysis of parametric vibration for elastically constrained pipes conveying pulsating fluid. Acta Mech Solida Sin. 2023;36(2):230–240.

[14] Paidoussis MP, Issid N. Dynamic stability of pipes conveying fluid. J Sound Vib. 1974;33(3):267–294.

[15] Norouzi AR, Tahmasebipour M. Effect of AFM cantilever geometry on the DPL nanomachining process. Int J Adv Des Manuf Technol. 2016;9(4):75–80.

[16] Anakira N, Batiha IM, Dehilis S, Irianto I, Oussaeif TE, Chebana Z, et al. Solvability and blow-up of nonlinear singular and degenerate problem with nonlocal condition. Int Rev Model Simul. 2024;17(6):403–415.

[17] Ghasemi M, Javid A. Permeability estimation using rock physics modeling and variational Bayes inversion. Pet Sci. 2025.

[18] Kevorkian JK, Cole JD. Multiple Scale and Singular Perturbation Methods. vol. 114. Springer Science & Business Media; 2012.

[19] Chang X, Hu B. Vibration characteristics and stability analysis of fluid-conveying pipe. Int J Struct Stab Dyn. 2025:2750053.

Отказ от ответственности / Примечание издателя

Утверждения, мнения и данные во всех публикациях принадлежат исключительно отдельным авторам и участникам и не обязательно отражают взгляды издателя, журнала или редакторов. Издатель, журнал и редакторы не несут ответственности за вред людям или ущерб имуществу, возникший вследствие использования идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в тексте.

Disclaimer of Liability/Publisher's Note

The statements, opinions, and data contained in all publications are solely those of the individual author(s) and contributor(s) and do not necessarily reflect the views of the Publisher, the Journal, or the editors. The Publisher, the Journal, and the editors disclaim responsibility for any injury to persons or damage to property resulting from any ideas, methods, instructions, or products referred to in the content.