Uzbek Journal “Problems of Mechanics”

научная статья

DOI: 10.68846/pmjournal-2026-37-00002

Численное решение плоской динамической задачи теории упругости в напряжениях

Акмал Бобоназаров[1], **Абдували Халджигитов**[1], **Отажон Тиловов**[1*]

[1] Кафедра механики и математического моделирования, математический факультет, Национальный университет Узбекистана, ул. Университетская, 4, Ташкент, 100174, Узбекистан

[*] **Автор для корреспонденции:** otajontilovov95@gmail.com

Поступила: 16 июня 2026 | **Доработана:** 15 августа 2026 | **Принята:** 05 сентября 2026 | **Опубликована:** 30 сентября 2026

АННОТАЦИЯ

Работа посвящена постановке и численному решению плоской динамической задачи теории упругости, в которой основными неизвестными являются компоненты тензора напряжений. Цель исследования — построение численного алгоритма для непосредственного определения динамического напряжённого состояния однородной изотропной упругой среды. На основе уравнений движения, соотношений Коши и закона Гука получена система трёх дифференциальных уравнений относительно напряжений с начальными и граничными условиями. Пространственная дискретизация выполнена методом конечных элементов Галёркина. Для интегрирования по времени использованы метод Ньюмарка в программе на языке C++ и конечно-разностная схема в реализации FreeFEM++. Рассмотрена прямоугольная область, на верхнюю границу которой действует переменная во времени нормальная нагрузка, а остальные границы свободны от поверхностных сил. Получены пространственные распределения напряжений и временная зависимость нормального напряжения в центральной точке области. Сопоставление результатов двух реализаций показало качественную согласованность распределений и колебательного характера напряжений. Полученные результаты демонстрируют применимость рассмотренного подхода к численному исследованию плоских динамических задач упругости в напряжениях.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

динамическая упругость, формулировка в напряжениях, метод конечных элементов, метод Галёркина, метод Ньюмарка, конечно-разностная схема, FreeFEM++.

Numerical Solution of the Plane Dynamic Problem of Elasticity in Terms of Stresses

Akmal Bobonazarov[1], **Abduvali Khaldjigitov**[1], **Otajon Tilovov**[1*]

[1] Department of Mechanics and Mathematical Modeling, Faculty of Mathematics, National University of Uzbekistan, 4 Universitetskaya Street, Tashkent 100174, Uzbekistan

[*] **Corresponding author:** otajontilovov95@gmail.com

ABSTRACT

This study addresses the formulation and numerical solution of a plane dynamic elasticity problem in which the stress tensor components are the primary unknowns. The objective is to develop a numerical algorithm for directly determining the dynamic stress field in a homogeneous isotropic elastic medium. The equations of motion, strain–displacement relations, and Hooke’s law are used to derive a system of three differential equations in terms of stresses, supplemented by initial and boundary conditions. Spatial discretization is performed using the Galerkin finite element method. Time integration is carried out using the Newmark method in a C++ program and a finite difference scheme in a FreeFEM++ implementation. A rectangular domain is subjected to a time-dependent normal load on its upper boundary, while the remaining boundaries are traction-free. Spatial stress distributions and the time history of the normal stress at the centre of the domain are obtained. Comparison of the two implementations shows qualitative agreement in the stress distributions and their oscillatory behaviour. The results demonstrate the applicability of the approach to the numerical investigation of plane dynamic elasticity problems formulated in terms of stresses.

KEYWORDS

dynamic elasticity, stress formulation, finite element method, Galerkin method, Newmark method, finite difference scheme, FreeFEM++.

1. Введение

Исследование динамического состояния твердых тел под действием внешних сил имеет большое значение в сейсмологии, в машиностроении, в горнодобывающей отрасли, а также в различных инженерных расчётах и технических приложениях.

В классической теории упругости задачи чаще всего формулируются в виде краевых задач относительно перемещений, и затем напряжения определяются по закону Гука. В работах Е. И. Шемякина [3] волновые и колебательные процессы в твёрдых телах рассматриваются на основе динамических уравнений теории упругости, и изложены теоретические основы волновых процессов [4].

В работах С. Н. Васильковского динамические задачи теории упругости сформулированы относительно напряжений[4]. П. В. Жуков и А. А. Каландаров [8] исследовали нестационарные задачи термоупругости, связанные с возникновением термических напряжений. Работы Б. М. Мардонова, К. С. Султанова и И. К. Мирзаева [7] посвящены задачам сейсмодинамики, распространению упругих и неупругих волн, а также расчёту отклика сооружений при динамическом нагружении. А. Н.

Коновалов рассматривал динамические задачи теории упругости в постановке «скорость — напряжение» и показал возможность формулировки таких задач через напряжения [9].

Однако в ряде задач, особенно когда требуется непосредственная оценка напряжённого состояния, удобной является формулировка краевой задачи через компоненты напряжений. При таком подходе для плоской задачи в качестве неизвестных функций принимаются компоненты напряжений и На основе уравнений движения, соотношений Коши, закона Гука и условий совместности деформаций можно получить замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно напряжений [5].

Настоящая работа посвящена постановке двумерной динамической задачи теории упругости в напряжениях и её численному решению методом конечных элементов Галёркина. В рассматриваемой модельной задаче на верхнюю границу прямоугольной области действует зависящая от времени нормальная поверхностная сила, а остальные стороны считаются свободными. Граничная нагрузка задаётся в виде . При этом определяется распределение компонент напряжений в области, а также их изменение во времени в выбранной точке. Пространственная дискретизация задачи выполняется методом конечных элементов, а расчёт по времени проводится с использованием динамической схемы.

Основная цель работы состоит в построении математической модели двумерной динамической задачи теории упругости, поставленной относительно напряжений, и в анализе процесса распространения волн в прямоугольной области на основе численного алгоритма, использующего метод конечных элементов Галёркина. Вычисления выполнены с помощью программы, разработанной на языке C++, а также в программной среде FreeFEM++. Согласование численных результатов, полученных разными алгоритмами и в разных программных средах, подтверждает корректность предложенных модельных уравнений и достоверность полученных решений..

2. Методы

Рассматривается двумерная динамическая задача теории упругости для изотропной однородной среды в декартовой системе координат *(x,y)*. В качестве основных неизвестных функций принимаются компоненты тензора напряжений σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy}. Предполагается, что деформации являются малыми, а материал подчиняется линейному закону Гука. Динамическое напряжённо-деформированное состояние среды описывается системой уравнений движения [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X_1 &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + X_2 &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Для изотропной упругой среды соотношения закона Гука имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}), \\ \sigma_{yy} &= 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}), \\ \sigma_{xy} &= 2\mu\varepsilon_{xy}. \end{aligned} \tag{2}$$

Соотношения Коши между компонентами деформаций и перемещений записываются следующим образом:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \tag{3}$$

где u, v компоненты перемещений, λ, μ постоянные Ламе, ρ плотность, X_1, X_2 компоненты объемных сил. В дальнейшем объемные силы не учитываются, то есть принимается $X_1 = X_2 = 0$.

Продифференцируем первое уравнение системы (1) по координате x, а второе по координате , с учётом соотношений Коши получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x \partial y} &= \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \sigma_{21}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial y^2} &= \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Дифференцируя закон Гука (2) по времени можно найти, что

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial^2 (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial t^2}, \\ 2\mu \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial^2 (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Далее продифференцируем первое уравнение системы (1) по координате y, а второе по координате *x*, и пренебрегая объёмными силами имеем

$$\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2}=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial^2\sigma_{21}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y\partial x}=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right). \tag{6}$$

Складывая уравнения (6), т.е.

$$\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_{21}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y\partial x}=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{7}$$

и разделив обе части уравнения на 2ρ с учетом соотношения Коши, можно найти

$$\frac{1}{2\rho}\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_{21}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial t^2} \tag{8}$$

Дифференцируя дважды по времени третье соотношение закона Гука (2) имеем

$$\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial t^2}=2\mu\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial t^2} \tag{9}$$

Подставляя последнее соотношение в (8), получаем

$$\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_{21}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial t^2} \tag{10}$$

Подставляя соотношения (4) в соотношения (5) и рассматривая их совместно с уравнением (10), получим систему дифференциальных уравнений относительно компонент тензора напряжений для плоской динамической задачи теории упругости [8]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}+\frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}+\frac{2(\lambda+\mu)}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial t^2},\\
&\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}+\frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}+\frac{2(\lambda+\mu)}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial t^2},\\
&\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Начальные условия принимаются в следующем виде:

$$\sigma_{11}(x,y,0)=\varphi_1,\qquad \sigma_{22}(x,y,0)=\varphi_2,\qquad \sigma_{12}(x,y,0)=\varphi_3, \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_1,\ \left.\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_2,\quad \left.\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_3$$

Граничные условия имеют вид:

$$(\sigma_{11}n_1+\sigma_{12}n_2)|_\Gamma=S_1,\qquad (\sigma_{21}n_1+\sigma_{22}n_2)|_\Gamma=S_2 \tag{13}$$

где n_1, n_2 - компоненты внешней нормали к границе области Γ, а S_1, S_2 - компоненты поверхностной нагрузки.

Для численного решения системы уравнений (11) применяем метод конечных элементов Галёркина. Расчётная область разбивается на конечное число элементов, внутри каждого из которых компоненты напряжений аппроксимируются с использованием функций формы. В пределах конечного элемента (e) компоненты напряжений представляются в виде

$$\sigma_i^{(e)}(x_1,x_2,t)=\sigma_{mi}(t)N_m(x_1,x_2),\qquad m=1,2,\ldots,r. \tag{14}$$

где $N_m(x_1,x_2)$ функции формы конечного элемента, r - число узлов элемента, $\sigma_{mi}(t)$ - значения компонент напряжений в узлах элемента, зависящие от времени [12].

Аппроксимация (14) соответствует подходу типа Канторовича, при котором пространственные и временные переменные разделяются. Пространственная зависимость описывается функциями формы, а временная неизвестными узловыми функциями [12].

Применяя метод Галёркина к системе уравнений (11), получаем следующую интегральную форму:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e}\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial t^2}-\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}-\frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}-\frac{2(\lambda+\mu)}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x\partial y}\right)N_l\,d\Omega=0,\\
&\int_{\Omega^e}\left(\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial t^2}-\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}-\frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}-\frac{2(\lambda+\mu)}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y\partial x}\right)N_l\,d\Omega=0,\\
&\int_{\Omega^e}\left(\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial t^2}-\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2}\right)\right)N_l\,d\Omega=0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя аппроксимацию (14) в первое уравнение системы (11) и применяя метод взвешенных невязок Галёркина, получаем

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\Omega^{(e)}} N_m N_l \, d\Omega\right) \ddot{\sigma}_m^{11} + \left[\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\left(\int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial N_m}{\partial x}\frac{\partial N_l}{\partial x}\, d\Omega\right)\right]\sigma_m^{11} \\
&\quad + \left[\frac{\lambda}{\rho}\left(\int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial N_l}{\partial y}\frac{\partial N_m}{\partial y}\, d\Omega\right)\right]\sigma_m^{22} + \left[\frac{2(\mu+\lambda)}{\rho}\left(\int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial y}\, d\Omega\right)\right]\sigma_m^{12} \\
&= \int_{\Gamma^{(e)}} \left[\frac{2(\mu+\lambda)}{\rho}\frac{\partial N_m}{\partial y} N_l\right]\{\sigma_m^{12}\}\, n_1\, d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma^{(e)}} \left[\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\frac{\partial N_m}{\partial x} N_l n_1\right]\{\sigma_m^{11}\}\, d\Gamma + \int_{\Gamma^{(e)}} \left[\frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial N_m}{\partial y} N_l n_2\right]\{\sigma_m^{22}\}\, d\Gamma.
\end{aligned} \tag{16}$$

Аналогичные выражения строятся для двух остальных уравнений системы (11). Следует отметить, что поверхностные интегралы, возникающие после интегрирования по частям, позволяют естественным образом учесть граничные условия задачи. Согласно формулам Коши, компоненты поверхностных сил на границе определяются выражением $\sum_{j=1}^{2} \sigma_{ij} n_j \Big|_{\Sigma_2} = S_i^0$.

После объединения всех элементных уравнений формируется глобальная матричная система для плоской динамической задачи [2]:

$$[M]\{\ddot{\Delta}\} + [C]\{\dot{\Delta}\} + [K]\{\Delta\} = \{F\} \tag{17}$$

где $[M]$ - матрица массы, $[C]$ - матрица демпфирования, $[K]$ - матрица жёсткости, $\{\Delta\}^T$ - вектор неизвестных узловых значений компонент тензора напряжений, $\{F\}$ - вектор внешних нагрузок.

Для каждого конечного элемента матрица массы имеет вид

$$[M]^{(e)} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega^{(e)}} N_m N_l \, d\Omega & 0 & 0 \\ 0 & \int_{\Omega^{(e)}} N_m N_l \, d\Omega & 0 \\ 0 & 0 & \int_{\Omega^{(e)}} N_m N_l \, d\Omega \end{bmatrix} \tag{18}$$

В рассматриваемой задаче демпфирование не учитывается, поэтому $[C]^{(e)} = \{0\}$.

Матрица жёсткости элемента имеет вид

$$[K]^{(e)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \tag{19}$$

где коэффициенты определяются через интегралы от производных функций формы.

Для линейного треугольного элемента производные функций формы являются постоянными величинами внутри элемента, поэтому выражения для коэффициентов матрицы жёсткости могут быть упрощены. С учётом соотношений

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \frac{\lambda+2\mu}{\rho}\int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial N_m}{\partial x}\frac{\partial N_l}{\partial x}\, d\Omega, & k_{12} &= \frac{\lambda}{\rho}\int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial N_l}{\partial y}\frac{\partial N_m}{\partial y}\, d\Omega, \\
k_{13} &= \frac{2(\lambda+\mu)}{\rho}\int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial y}\, d\Omega, & k_{21} &= \frac{\lambda}{\rho}\int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial x}\, d\Omega, \\
k_{22} &= \frac{\lambda+2\mu}{\rho}\int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial N_m}{\partial y}\frac{\partial N_l}{\partial y}\, d\Omega, & k_{23} &= \frac{2(\lambda+\mu)}{\rho}\int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial N_l}{\partial y}\frac{\partial N_m}{\partial x}\, d\Omega, \\
k_{31} &= \frac{\mu}{\rho}\int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial y}\, d\Omega, & k_{32} &= \frac{\mu}{\rho}\int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial N_l}{\partial y}\frac{\partial N_m}{\partial x}\, d\Omega, \\
k_{33} &= \frac{\mu}{\rho}\left(\int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial x}\, d\Omega + \int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial N_l}{\partial y}\frac{\partial N_m}{\partial y}\, d\Omega\right).
\end{aligned} \tag{20}$$

интегралы в матрице массы также могут быть вычислены аналитически. Для линейного треугольного элемента справедливы следующие соотношения

$$\int_{\Omega^{(e)}} N_i^2 \, d\Omega = \frac{A}{6}, \qquad \int_{\Omega^{(e)}} N_i N_j \, d\Omega = \frac{A}{12} \tag{21}$$

где A площадь треугольного конечного элемента.

Тогда локальная матрица массы принимает стандартный вид [13]

$$[M]^{(e)} = \frac{A}{12}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Таким образом, применение метода конечных элементов Галёркина позволяет свести исходную систему дифференциальных

уравнений динамической теории упругости к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно узловых значений компонент тензора напряжений.

3. Результаты и обсуждение

Метод конечных элементов является одним из эффективных подходов к численному решению задач теории упругости. Суть метода конечных элементов заключается в замене дифференциальной задачи вариационной, и, исходя из условий стационарности, в построении системы дискретных уравнений относительно узлов конечных элементов, покрывающих занимаемую область сплошной средой. Обычно, в итоге получится система алгебраических уравнений задач, или система обыкновенных дифференциальных уравнений в случае динамических задач относительно узловых значений перемещений. В настоящее время, в рамках метода конечных элементов разработаны разнообразные программные комплексы как ANSYS, COSMOSM, Solidwork, Abacus, LIRA и многие другие. Эти комплексы программ позволяют решать актуальные инженерно-технические задачи промышленности, как машиностроения, самолётостроения, атомной энергетики, авиации и космоса и др. и предназначены, в основном, для инженеров. Программный комплекс FreeFEM++, в отличие от вышеназванных, основан на расширенном алгоритмическом языке C++ с учетом алгоритма метода конечных элементов в рамках метода Галеркина и предназначен для решения дифференциальных уравнений в частных производных различного типа. При использовании FreeFEM++ важным является построение функционала (билинейной формы), соответствующей дифференциальной задаче, и написание кода на C++, реализующего алгоритм метода конечного элемента с учетом билинейной формы.

В настоящей работе FreeFEM++ использован для решения плоской динамической задачи теории упругости в напряжениях. Для сравнения, упомянутая плоская задача в напряжениях, также реализована конечно-разностным методом на языке C++. При этом по пространственным координатам применяется метод конечных элементов Галёркина, а по времени — конечно-разностная схема.

Для решения данной динамической задачи на FreeFEM++ применяется полудискретный подход: в дифференциальных уравнениях производные по времени изначально заменяются конечно-разностными отношениями, и затем применяя метод Галёркина с базисными функциями для конечных элементов определяется билинейная форма.

В нашем случае, краевая задача состоит из системы трех дифференциальных уравнений второго порядка относительно компонент тензора напряжений $\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12}$. Умножая эти уравнения на соответствующие базисные функции $\bar{\sigma}_{11},\bar{\sigma}_{22},\bar{\sigma}_{12}$ и интегрируя по частям по заданной области и используя формулу Гаусса-Остроградского с учетом граничных условий может быть найдена билинейная форма. Так как в уравнениях производные по времени записываются в конечно-разностном виде, при построении билинейной формы по пространственным координатам появляются слагаемые, зависящие от разных временных слоёв.

С учётом начальных условий задача приводится к рекуррентной формуле по времени. На каждом временном шаге билинейная форма вычисляется с учётом граничных условий и значений, полученных на предыдущих шагах.

Продемонстрируем построение билинейной формы. Для чего первое дифференциальное уравнение системы (11) умножим на базисную функцию $\bar{\sigma}_{11}$, равной нулю на границе области и проинтегрируем по заданной области, т.е.

$$\int_\Omega \left(\frac{\sigma_{11}^{i+1}}{\Delta t^2}\bar{\sigma}_{11} + \frac{\lambda+2\mu}{\rho}\frac{\partial\sigma_{11}^{i+1}}{\partial x}\frac{\partial\bar{\sigma}_{11}}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial\sigma_{11}^{i+1}}{\partial y}\frac{\partial\bar{\sigma}_{11}}{\partial y} + \frac{\lambda+\mu}{\rho}\frac{\partial\sigma_{22}^{i+1}}{\partial x}\frac{\partial\bar{\sigma}_{11}}{\partial x}\right) d\Omega + \int_\Omega \frac{\sigma_{11}^{i-1}-2\sigma_{11}^{i}}{\Delta t^2}\bar{\sigma}_{11} = 0. \tag{25}$$

Применяя конечно-разностную схему по времени и интегрируя по частям с учетом формулы Гаусса-Остроградского можно найти следующее выражение:

$$\int_\Omega \left(\frac{\sigma_{11}^{i+1}}{\Delta t^2}\bar{\sigma}_{11} - \frac{\lambda+2\mu}{\rho}\frac{\partial\sigma_{11}^{i+1}}{\partial x}\frac{\partial\bar{\sigma}_{11}}{\partial x} - \frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial\sigma_{22}^{i+1}}{\partial y}\frac{\partial\bar{\sigma}_{11}}{\partial y} - \frac{2(\lambda+\mu)}{\rho}\frac{\partial\sigma_{12}^{i+1}}{\partial x}\frac{\partial\bar{\sigma}_{11}}{\partial y}\right) d\Omega + \int_\Omega \frac{\sigma_{11}^{i-1}-2\sigma_{11}^{i}}{\Delta t^2}\bar{\sigma}_{11} = 0. \tag{26}$$

Полученное выше слагаемое $\frac{\sigma_{11}^{i-1} - 2\sigma_{11}^{i}}{\Delta t^2}$ определяется по начальным значениям. Значение σ_{11}^{i+1} определяется на текущем временном шаге $j+1$.

Остальные уравнения также умножаются на соответствующие базисные функции и интегрируются по области, что позволяет получить аналогичные выражения. Сумма полученных выражений составляет искомую билинейную форму.

Таким образом, при использовании полудискретного метода на каждом временном шаге значения $\sigma_{11}^{i+1},\sigma_{22}^{i+1},\sigma_{12}^{i+1}$ вычисляются по рекуррентной формуле, на основе значений напряжений на предыдущем временном слое, а также заданных начальных и граничных условий.

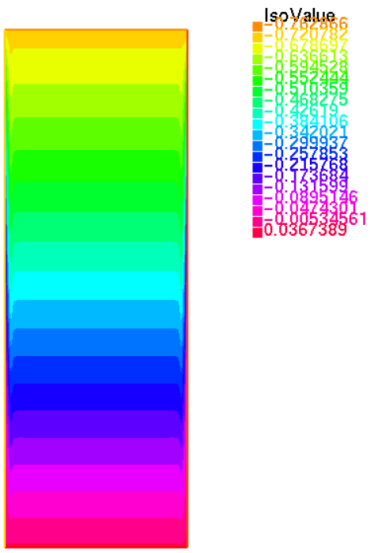
Рассмотрим плоскую динамическую задачу (11-13) в прямоугольной области размерами 0.15 x 0.424. Пусть на верхней границе прямоугольника задана поверхностная сила $\sigma_{22} = q(t), \quad \sigma_{12} = 0$, а остальные стороны свободны от нагрузок.

Параметры материала и нагрузки заданы следующим образом:

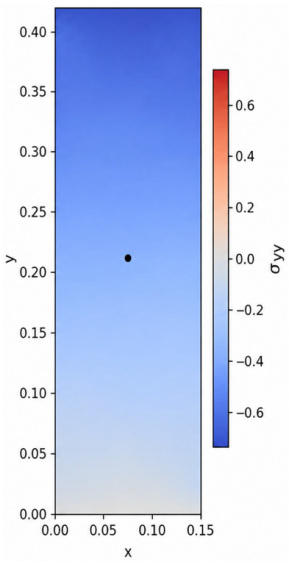
$$E = 210*10^9 Pa, \quad \nu = 0.3, \quad \rho = 7800 kg/m^3, \quad P = 200N, \quad t_0 = 0.004s, \quad q(t) = P(t - t_0)\sin(2\pi\omega t)$$

Изложенная задача решена двумя способами, а именно методом Галеркина и полудискретным методом. Во втором пункте методом Галеркина была построена система уравнений (17), решаемая методом Ньюмарка. В третьем пункте изложена суть полудискретного метода в сочетании с методом Галеркина, и построена билинейная форма для динамической плоской задачи

используемая при решении задачи на FreeFEM++. Для решения системы уравнений (17) методом Ньюмарка было разработано программное обеспечение на C++.



а



б

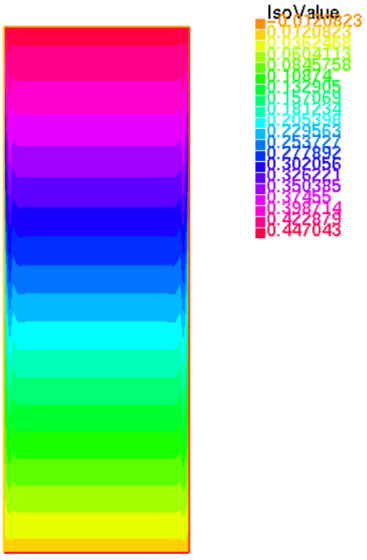
Рисунок 1. Распределение нормального напряжения σ_{22} в прямоугольной области в момент времени t = 0,0001 с.
Distribution of the normal stress σ_{22} in the rectangular domain at t = 0.0001 s.

На рис. 1 приведено распределение нормального напряжения σ_{22} в начальный момент времени *t=0.0001 c*. На рис. *1-а* приведён результат, полученный в среде FreeFEM++, а на рис. 1-б показан результат, полученный в тот же момент времени с использованием программы на языке C++. В данный момент времени внешняя нагрузка действует только на верхнюю границу прямоугольной области, поэтому наибольшее напряжение наблюдается именно в её верхней части. Максимальное значение напряжения составляет примерно *-0.4,* что соответствует сжимающему напряжённому состоянию. По мере удаления от верхней границы напряжение постепенно уменьшается, что свидетельствует о начале распространения упругой волны внутрь материала. Поскольку динамическое воздействие ещё не успело распространиться по всей области, в нижней части прямоугольника напряжение остаётся близким к нулю.

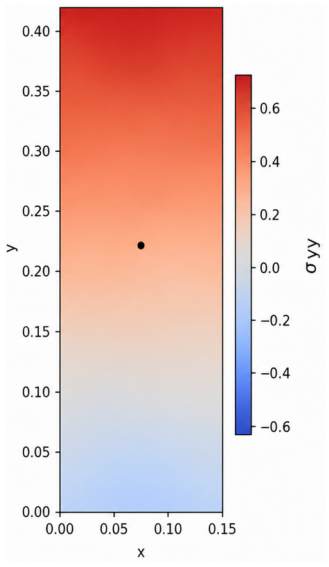
Полученный результат имеет физическое объяснение, так как нагрузка задаётся в виде

$$q(t) = P(t - t_0)\sin(2\pi\omega t)$$

и на начальном этапе расчёта выполняется условие $(t - t_0) < 0$. Вследствие этого на верхней границе возникает отрицательное напряжение.

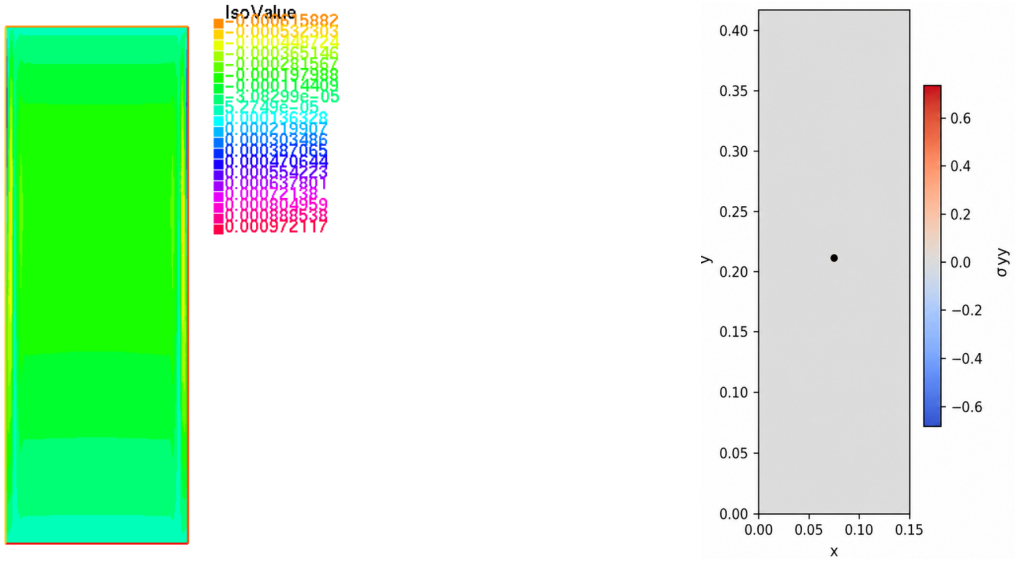


а



б

Рисунок 2. Распределение нормального напряжения σ_{22} в прямоугольной области в момент времени t = 0,0003 с.
Distribution of the normal stress σ_{22} in the rectangular domain at t = 0.0003 s.



а *б*

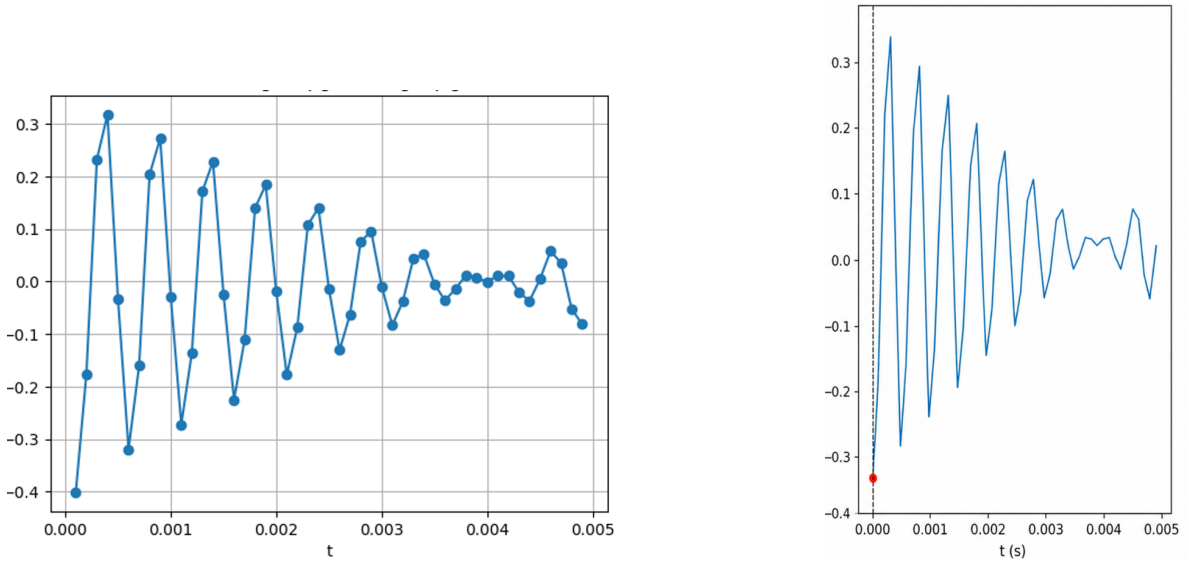
Рисунок 3. Распределение нормального напряжения σ_{22} в прямоугольной области в момент времени t = 0,004 с.
Distribution of the normal stress σ_{22} in the rectangular domain at t = 0.004 s.

На рис. 2 приведено распределение напряжения σ_{22} в момент времени t=0.0003 с. На рис. *2-а* и *2-б* приведены результаты, полученные соответственно в FreeFEM++ и C++. Из рисунков видно, что в верхней части области, где приложена нагрузка, напряжение принимает положительное значение порядка *0.35*. Переход напряжения от отрицательного значения в начальный момент времени к положительному связан с наличием в граничном условии множителя $\sin(2\pi\omega t)$. В результате сжимающее напряжение переходит в растягивающее.

Из рисунка также видно, что напряжение, возникающее на верхней границе, постепенно распространяется по всей пластине. Это свидетельствует о процессе распространения упругих волн внутри материала.

На рис. 3 приведено распределение напряжения σ_{22}в момент времени $t = t_0 = 0.004c$.

На рис. *3-а* и *3-б* показаны результаты, полученные соответственно на FreeFEM++ и C++ при *t=0.004 c.* Из рисунков видно, что в большей части нагруженной области значение напряжения близко к нулю. Это объясняется тем, что в граничном условии присутствует множитель *(t-t$_0$).* Поскольку t_0 = *0.004 c,* в данный момент времени заданная граничная нагрузка обращается в нуль.



а *б*

Рисунок 4. Изменение нормального напряжения σ_{22} во времени в центральной точке прямоугольной области.
Time variation of the normal stress σ_{22} at the centre of the rectangular domain.

На рис. *4-а* и *4-б* показано изменение напряжения в центральной точке области в течение всего рассматриваемого времени. Результаты получены соответственно на FreeFEM++ и C++. Из обоих рисунков видно, что напряжение изменяется в соответствии с нагрузкой, заданной на границе. При t=t$_0$ значение напряжения приближается к нулю. По мере увеличения величины |t-t$_0$ | возрастает и модуль напряжения.

На всех рисунках результаты, обозначенные буквами «*а*» и «*б*», дают близкие значения. Показана возможность применения

метода Ньюмарка и полудискретного подхода для решения динамической задачи по времени. По пространственным переменным использован метод конечных элементов Галёркина, на основе которого построены локальные и глобальные матрицы.

Вычислительный эксперимент выполнен для прямоугольной области. Результаты, полученные на FreeFEM++ и C++, были сопоставлены между собой. Они показали, что изменение напряжения σ_{22} имеет колебательный характер во времени в соответствии с заданной нагрузкой, и совпадают между собой.

В момент времени $t=t_0$ множитель $(t-t_0)$, входящий в функцию нагрузки, обращается в нуль, поэтому значения напряжений также приближаются к нулю. Качественное совпадение результатов FreeFEM++ и C++ подтверждает надёжность разработанного численного алгоритма.

4. Заключение

В данной работе двумерная динамическая задача теории упругости сформулирована относительно напряжений. На основе уравнений движения, соотношений Коши и закона Гука построена краевая задача в напряжениях. На верхней границе области задана зависящая от времени граничная сила.

Поставленная краевая задача дискретизирована методом конечных элементов Галёркина. Для решения динамических уравнений применён метод Ньюмарка, а алгоритм реализован на языке C++. Кроме того, в среде FreeFEM++ использован полудискретный подход, основанный на методе конечных элементов Галёркина по пространственным координатам и конечно-разностной схеме по времени.

Полученные результаты показали, что компонента напряжения σ_{22} имеет колебательный характер во времени. В момент времени $t=t_0$ значение нагрузки обращается в нуль, поэтому значения напряжений также приближаются к нулю. Совпадение результатов, полученных в C++ и FreeFEM++, подтверждает корректность разработанных алгоритмов и возможность решения двумерной динамической задачи теории упругости в напряжениях данными методами.

Декларации / Declarations

Вклад авторов: Концептуализация и постановка задачи, А.Х.; методология, А.Х. и А.Б.; разработка математической модели, А.Х. и О.Т.; программное обеспечение, А.Б.; проведение численного исследования, А.Х. и А.Б.; визуализация, А.Б.; написание первоначального варианта рукописи, О.Т. и А.Б.; рецензирование и редактирование текста, А.Х., О.Т. и А.Б.; научное руководство, А.Х. Все авторы прочитали и одобрили окончательную версию рукописи.

Author Contributions: Conceptualization and problem formulation, A.K.; methodology, A.K. and A.B.; mathematical model development, A.K. and O.T.; software, A.B.; numerical investigation, A.K. and A.B.; visualization, A.B.; writing—original draft preparation, O.T. and A.B.; writing—review and editing, A.K., O.T. and A.B.; supervision, A.K. All authors have read and approved the final version of the manuscript.

Финансирование: Данное исследование не получало внешнего финансирования.

Funding: This research received no external funding.

Одобрение этического комитета: Не применимо.

Ethics Approval: Not applicable.

Информированное согласие и согласие на публикацию: Не применимо.

Informed Consent and Consent for Publication: Not applicable.

Доступность данных: Данные, подтверждающие результаты данного исследования, доступны у автора для корреспонденции по обоснованному запросу.

Data Availability Statement: The data supporting the findings of this study are available from the corresponding author upon reasonable request.

Конфликт интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflicts of interest.

Обозначения и сокращения

Символ / Symbol	Расшифровка / Definition
σ_{11}, σ_{22}	Нормальные напряжения / Normal stresses
σ_{12}	Касательное напряжение / Shear stress
u, v	Компоненты перемещения / Displacement components
λ, μ	Постоянные Ламе / Lamé parameters
ρ	Плотность материала / Material density
t	Время / Time
Δt	Шаг интегрирования по времени / Time integration step
МКЭ / FEM	Метод конечных элементов / Finite element method

Список литературы

[1] Newmark NM. A Method of Computation for Structural Dynamics. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE. 1959;85(EM3):67–94.

[2] Benthien GW, Gurtin ME, Ralston TD. On the semi-discrete Galerkin method for hyperbolic problems and its application to problems in elastodynamics. Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1972;48:51–63.

[3] Yu Z, Xie X. Semi-Discrete and Fully Discrete Hybrid Stress Finite Element Methods for Elastodynamic Problems. Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications. 2015;8(4):582–604.

[4] Shemyakin EI. Dinamicheskie zadachi teorii uprugosti i plastichnosti: kurs lekcij [Dynamic problems of elasticity and plasticity: lecture course]. Novosibirsk: NGU; 1968. 337 p. (In Russian).

[5] Novackij V. Dinamicheskie zadachi termouprugosti [Dynamic problems of thermoelasticity]. Moscow: Mir; 1970. 256 p. (In Russian).

[6] Shemyakin EI. Vvedenie v teoriyu uprugosti [Introduction to elasticity theory]. Moscow: Moscow State University Publishing House; 1993. 95 p. (In Russian).

[7] Konovalov AN. Dinamicheskaya zadacha teorii uprugosti v postanovke skorosti–napryazheniya [Dynamic elasticity problem in velocity–stress formulation]. Differencial'nye uravneniya. 1999;35(2):238–248. (In Russian).

[8] Konovalov AN. Reshenie zadach teorii uprugosti v napryazheniyakh [Solving problems of elasticity theory in stresses]. Novosibirsk: NGU; 1979. (In Russian).

[9] Zienkiewicz OC, Taylor RL, Zhu JZ. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. 7th ed. Oxford: Elsevier; 2013.

[10] Zienkiewicz OC, Taylor RL. The Finite Element Method. Vol. 2: Solid Mechanics. 5th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann; 2000.

[11] Hughes TJR. The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. Mineola, New York: Dover Publications; 2000.

[12] Kalandarov A, Khaldjigitov A, Atabayev K. Coupled plane problem of dynamic thermal elasticity in stresses. In: AIP Conference Proceedings, Vol. 3265, No. 1; 2025:050024. https://doi.org/10.1063/5.0267727.

[13] Khaldjigitov AA, Kalandarov AK, Yusupov YS. Svyazannye zadachi termouprugosti i termoplastichnosti [Coupled problems of thermoelasticity and thermoplasticity]. Tashkent: Fan va texnologiya; 2019. 193 p. (In Russian).

[14] Khaldjigitov AA, Tilovov OU. Chislennoe reshenie chastichno-svyazannoj zadachi termouprugosti v napryazheniyakh [Numerical solution of a partially coupled thermoelasticity problem in stresses]. Problemy mekhaniki. 2023;(3). (In Russian).

Отказ от ответственности / Примечание издателя

Утверждения, мнения и данные во всех публикациях принадлежат исключительно отдельным авторам и участникам и не обязательно отражают взгляды издателя, журнала или редакторов. Издатель, журнал и редакторы не несут ответственности за вред людям или ущерб имуществу, возникшие вследствие использования идей, методов или продуктов, упомянутых в тексте.

Disclaimer of Liability/Publisher's Note

The statements, opinions and data in each publication are those of the authors and contributors and do not necessarily reflect the views of the Publisher, Journal or editors. The Publisher, Journal and editors disclaim responsibility for injury or damage arising from the use of any ideas, methods or products described in the content.